

Tentamen i Envariabelanalys 2

2019-06-05 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 10 + 8e^x.$$

2. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen med restterm av ordning 8 i ordoform till (2 p)

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(2x^2)} - \cos(x^2) - x^2 + 1.$$

- (b) Har $f(x)$ lokalt extremvärde för $x = 0$? (1 p)

3. Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq \sin \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = \sin \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

4. Avgör om integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x}}$$

är konvergent eller divergent.

5. Lös ekvationen

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 0$$

med potensserieansats. I svaret skall anges (minst) fyra nollskilda koefficienter, rekursionsformeln för seriens koefficienter och potensseriens konvergensradie.

6. Bestäm ett närmevärde till $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ med ett fel på högst 10^{-2} .

7. Visa att

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}$$

och använd detta till att visa att talet e inte är rationellt.

Lösningförslag envariabelanalys 2 2019-06-05

1. Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^4 + 2r^3 + 5r^2 = r^2(r^2 + 2r + 5) = r^2(r + 1 - 2i)(r + 1 + 2i).$$

Således ges lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 + C_2x + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

enligt känd sats. För att hitta partikulärlösningar utnyttjar vi superpositionsprincipen och hittar först en lösning till

$$p(D)y_{p_1} = 8e^x.$$

Eftersom $r = 1$ inte är en rot till $p(r)$ så försöker vi med ansatsen $y_{p_1} = Ae^x$. Direkt derivering visar att

$$p(D)(Ae^x) = Ae^x + 2Ae^x + 5Ae^x = 8Ae^x,$$

så om vi låter $A = 1$ gör det att högerledet blir $8e^x$. Givetvis kan vi ansätta $y_{p_1} = z(x)e^x$ istället och använda förskjutningssatsen (eller derivera på likt ovan) istället.

För att hitta en partikulärlösning till

$$p(D)y_{p_2} = 10$$

ansätter vi $y_{p_2} = Bx^2$ eftersom $p(D)$ (polynom) = polynom, där högerledet har gradtal två steg lägre (om vi ansätter ett polynom med grad ≥ 2). Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(Bx^2) = 10B,$$

så $B = 1$.

Svar: $y = C_1 + C_2x + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x) + e^x + x^2$.

2. (a) Standardutvecklingarna

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}t^3 + O(t^4) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + O(t^4)$$

och

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + O(u^5) \quad \text{samnt} \quad \cos(v) = 1 - \frac{v^2}{2} + O(v^4)$$

visar att, med $u = 2x^2$ och $t = \sin u$ samt $v = x^2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin(2x^2))^{1/2} - x^2 + 1 \\ &= \left(1 + 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + O(x^{10})\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right) - x^2 + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + O(x^{10})\right) - \frac{1}{8} (2x^2 + O(x^6))^2 + \frac{1}{16} (2x^2 + O(x^6))^3 \\ &\quad - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right) - x^2 + 1 \\ &= -\frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + 1 + \frac{x^4}{2} + O(x^8) \\ &= 1 - \frac{x^6}{6} + O(x^8). \end{aligned}$$

(b) Eftersom

$$f(x) = 1 + x^6 \left(-\frac{1}{6} + O(x^2) \right)$$

så ser vi att för x nära 0 så gäller att $f(x) < 1 = f(0)$ om $x \neq 0$ eftersom $x^6 > 0$ så $x^6 \left(-\frac{1}{6} + O(x^2) \right) < 0$ för $x \neq 0$ (små x). Således har $f(x)$ ett lokalt maximum då $x = 0$.

Svar: (a) $1 - \frac{x^6}{6} + O(x^8)$ (b) Ett lokalt maximum.

3. Enligt känd formel för plan area i polära koordinater erhåller vi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} r(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Kurvlängden får vi genom att summera bågsegmenten ds som i polära koordinater ges av

$$ds(\varphi) = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Svar: $A = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ respektive $L = \frac{2\pi}{3}$.

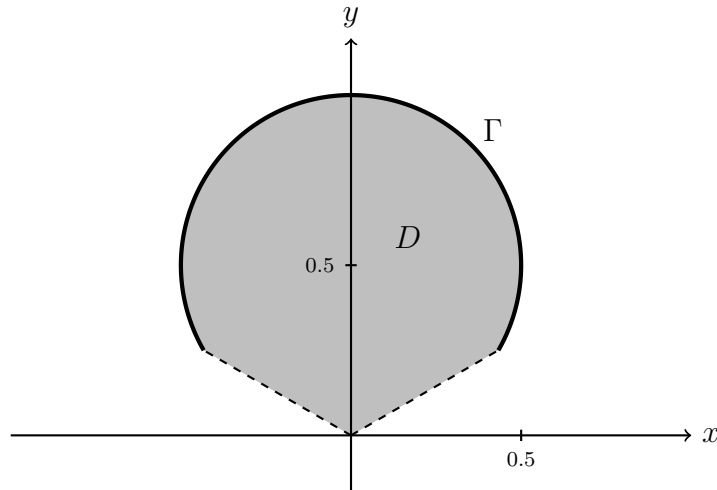
Notera att bågsegmentet ds i polära koordinater ges av

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi = \sqrt{x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi} \\ &= \dots = \sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Vidare kan det vara intressant att $r = \sin \varphi$ definierar en cirkel med radie $1/2$ och centrum i $(0, 1/2)$, något som vi kan se eftersom $x = r \cos \varphi = \sin \varphi \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi = \sin^2 \varphi$, så

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 &= \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \\ &= \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} = \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

vilket visar att objektet är en (del av en) cirkel med radie $1/2$ och centrum i $(0, 1/2)$.



4. Integranden är positiv och då $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$ så är integralen generaliserad i både 1 och ∞ . Låt oss dela upp integralen i två delar:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} dx. \quad (1)$$

Vi ser direkt att

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

för $1 \leq x \leq 2$, så

$$0 \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx < \infty$$

enligt den första jämförelsesatsen då den sista integralen är känt konvergent:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = [2\sqrt{x-1}]_1^2 = 2.$$

På liknande sätt ser vi att

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{x^{3/2}}, \quad 2 \leq x < \infty,$$

så

$$0 \leq \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx < \infty$$

enligt den första jämförelsesatsen, även här på grund av att den sista integralen är känt konvergent.

Eftersom båda integralerna i högerledet av (1) är konvergenta så måste även integralen i vänsterledet vara konvergent.

Svar: Konvergent.

5. Vi antar en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} (k+1) x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k.$$

Alltså måste

$$1 = y' - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1}) x^k.$$

Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att

$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $c_0 = 0$, vilket resulterar i att

$$c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0.$$

För udda index ser vi att

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} \\ c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= \frac{2c_5}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. \end{aligned}$$

Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

då de jämna termerna försvinner. Här är c_{2k+1} koefficienterna vi bestämde ovan. Konvergensradien kan vi enklast finna medelst kvottestet:

$$\left| \frac{c_{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right| |x|^2 = \left| \frac{2}{2k+3} \right| |x|^2 \rightarrow 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan. Konvergensradien är således oändlig.

Svar: $y(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{8x^7}{105} + \dots, R = \infty.$

Notera att vi kan hyfsa till uttrycket för koefficienterna genom att "fylla igen" hålen som dyker upp vid de jämna heltalen. Vi förlänger således med $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k = 2^k k!$, så

$$c_{2k+1} = \frac{2^k 2^k k!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2k \cdot (2k+1)} = \frac{4^k k!}{(2k+1)!}$$

för $k = 0, 1, 2, \dots$. Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k k! x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Observera att vi även kan hitta ett annat uttryck för lösningen genom att multiplicera med den integrerande faktorn e^{-x^2} :

$$y' - 2xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} y \right) = e^{-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + C e^{x^2}.$$

Med villkoret $y(0) = 0$ så ser vi att $C = 0$. Alltså måste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k k! x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Vad händer om vi Maclaurinutvecklar integranden och e^{x^2} ?

6. Vi vet att

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + r(t),$$

där

$$r(t) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} t^{n+1}$$

och ξ är mellan 0 och t . Alltså måste

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + r(-x^2),$$

där

$$r(-x^2) = (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{2n+2}$$

och ξ är mellan 0 och $-x^2$. Vi kommer integrera över intervallet $-1 \leq x \leq 1$, så ξ är alltså mellan 0 och -1 . Därmed blir

$$|r(-x^2)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{2n+2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Hur många termer är nödvändiga? Svaret får vi genom att undersöka vad som händer när vi integrerar resttermen:

$$\left| \int_{-1}^1 r(-x^2) dx \right| \leq \int_{-1}^1 |r(-x^2)| dx \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_{-1}^1 |x|^{2n+2} dx = \frac{2}{(n+1)! (2n+3)}.$$

Genom att testa ser vi att $n = 3$ gör att

$$\left| \int_{-1}^1 r(-x^2) dx \right| \leq \frac{2}{24 \cdot 9} = \frac{1}{108} < 10^{-2}.$$

Alltså kommer

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} \right) dx + R = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \right) + R = \frac{52}{35} + R,$$

där $|R| < 10^{-2}$.

Svar: $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{52}{35}.$

Ett alternativ är att betrakta Maclaurinserien för integranden:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!},$$

som har konvergensradien $R = \infty$. Vi då integrera termvis och erhåller att

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_{-1}^1 \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} = \underbrace{2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)}}_{\text{approximation}} + \underbrace{2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)}}_{\text{fel}}. \end{aligned}$$

Vi noterar att detta är en Leibniz-serie (termernas belopp avtar monotont mot noll och serien är alternerande), så

$$\left| 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} \right| \leq \frac{2}{(n+1)! (2n+3)} \leq \frac{1}{12 \cdot 9} = \frac{1}{108} < 10^{-2}$$

om vi låter $n = 3$.

7. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$ för alla $t \in \mathbf{R}$ så är $e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Då alla termer är positiva så gäller då att

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > 0$$

för alla icke-negativa heltal n . Vidare gäller att

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1)(n+1)} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n! n}, \end{aligned}$$

vilket är precis vad vi ville visa.

Antag nu att e är rationell. Då finns (positiva) heltal m och n så att $e = m/n$. Om vi förlänger olikheten vi bevisat med $n!$ så ser vi att

$$0 < n! \cdot \frac{m}{n} - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{n!}{n!n} \Leftrightarrow 0 < l < \frac{1}{n}$$

för heltalet

$$l = n! \cdot \frac{m}{n} - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = m(n-1)! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}.$$

Då n är ett positivt heltal har visat att det finns ett heltal l så att $0 < l < 1/n$ där $1/n \leq 1$, vilket givetvis är orimligt. Alltså kan inte e vara ett rationellt tal.

Svar: Se ovan.