TATA42 Envariabelanalys 2 2019-03-18, lösningsförslag

1. Karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 + 2r^2 - 15r = r(r-3)(r+5)$ har nollställena $r_1 = 0$, $r_2 = 3$ och $r_3 = -5$. Homogenlösningen blir därför

$$y_h = A + Be^{3x} + Ce^{-5x}.$$

För att finna en partikulärlösning y_p delar vi upp högerledet enligt $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, där $h_1(x) = 30x$ och $h_2(x) = -65\cos x$, och söker partikulärlösningar till var och en av dessa.

Ansatsen $y_{p1} = ax^2+bx$ ger $y'_{p1} = 2ax+b$, $y''_{p1} = 2a$ och $y'''_{p1} = 0$, och därmed är $y'''_{p1}+2y''_{p1}-15y'_{p1} = 0 + 2\cdot 2a - 15(2ax+b) = (-30a)x + (4a-15b)$, som blir lika med $30x$ för alla x om $-30a = 30$ och $4a - 15b = 0$, d.v.s. om $a = -1$ och $b = -4/15$; således duger $y_{p1} = -x^2 - 4x/15$.

Ansatsen $y_{p2} = a\cos x + b\sin x$ ger $y'_{p2} = -a\sin x + b\cos x$, $y''_{p2} = -a\cos x - b\sin x$ och $y'''_{p2} = a\sin x - b\cos x$, och därmed är $y'''_{p2} + 2y''_{p2} - 15y'_{p2} = (-2a-16b)\cos x + (16a-2b)\sin x$, som blir lika med $-65\cos x = (-65)\cos x + 0\sin x$ för alla x om $-2a-16b = -65$ och $16a - 2b = 0$, d.v.s. om $a = 1/2$ och $b = 4$; $y_{p2} = (\cos x)/2 + 4\sin x$ duger därför.

Linjariteten medför nu att alla lösningar till differentialekvationen ges av $y = y_h + (y_{p1} + y_{p2}) = A + Be^{3x} + Ce^{-5x} - x^2 - 4x/15 + (\cos x)/2 + 4\sin x$.

<u>Svar</u>: $y = A - \dfrac{4x}{15} - x^2 + Be^{3x} + Ce^{-5x} + \dfrac{\cos x}{2} + 4\sin x.$

2. (a) Sätt $a_k = \dfrac{k^2}{1-2k^2}$. Vi ser att $a_k = \dfrac{1}{1/k^2 - 2} \to -\dfrac{1}{2}$ då $k \to \infty$, så $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är därför divergent enligt Divergenstestet. <u>Svar</u>: Divergent.

(b) Sätt $a_k = \dfrac{(-1)^k}{\ln k}$. Eftersom $\ln k > 0$ då $k \geq 2$ är serien $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ alternerande, och eftersom dessutom $|a_k| = \dfrac{1}{\ln k} \searrow 0$ då $k \to \infty$ ($|a_k|$ *avtar* mot noll, d.v.s. $|a_2| \geq |a_3| \geq |a_4| \geq \ldots$ och $|a_k| \to 0$) är serien en Leibnizserie, och därmed konvergent. <u>Svar</u>: Konvergent.

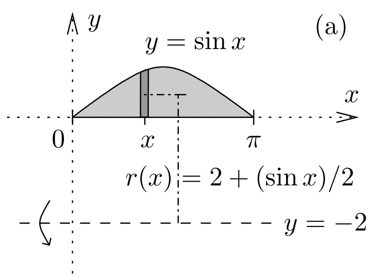
(c) Eftersom $\sqrt{1+x^4} \geq 1$ och $\sqrt{1+x^4} \geq x^2$, till och med för alla $x \in \mathbb{R}$, gäller olikheterna

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1 \text{ då } 0 < x < 1 \qquad \text{och} \qquad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{x^2} \text{ då } 1 < x < \infty.$$

Således får vi

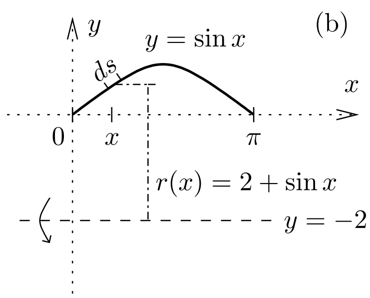
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \leq \int_0^1 1\,dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \Big[x\Big]_{x=0}^{x=1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x\to\infty} = 2.$$

3. Se principskisserna till höger.



(a) Areaelementet $dA(x) = \big(\sin x - 0\big)\,dx = \sin x\,dx$, tyngdpunktens väg $= 2\pi r(x) = 2\pi\big(2 + (\sin x)/2\big)$, så rotationsvolymen blir enligt Guldins regel

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi 2\pi\big(2 + (\sin x)/2\big)\,dA(x) = \int_0^\pi 2\pi\big(2+(\sin x)/2\big)\sin x\,dx \\ &= \pi\int_0^\pi (4\sin x + \sin^2 x)\,dx = \pi\int_0^\pi \left(4\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\ &= \pi\left[-4\cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \underline{\underline{8\pi + \frac{\pi^2}{2}}}. \end{aligned}$$



(b) Bågelementet $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = ds(x)$ för växande x, tyngdpunktens väg $= 2\pi r(x) = 2\pi(2+\sin x)$, så rotationsarean blir enligt Guldins regel

$$A_{\text{rot}} = \int_0^\pi 2\pi(2+\sin x)\,ds(x) = \underline{\underline{\int_0^\pi 2\pi(2+\sin x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.}}$$

4. (a) Derivering ger

$$f(x) = \arctan x, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

så

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(\xi) = -\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 1 ges av $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x, så vi får följande

<u>Svar</u>: $\arctan x = x - \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\, x^2$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x.

(b) Insättning av $x = 1/5$ i utvecklingen i (a) ger

$$\underbrace{\arctan\frac{1}{5}}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Approx.}} \underbrace{- \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\cdot\frac{1}{5^2}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något ξ mellan 0 och 1/5. Således får vi

$$\left|\arctan\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right| = \left|-\frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\cdot\frac{1}{5^2}\right| = \frac{|\xi|}{(1+\xi^2)^2}\cdot\frac{1}{5^2} \le \frac{1/5}{(1+0^2)^2}\cdot\frac{1}{25} = \frac{1}{125} \le \frac{1}{100},$$

vilket skulle bevisas; notera att $|\xi| \le 1/5$ och $1+\xi^2 \ge 1+0^2$.

Alternativ lösning, oberoende av (a): Vi kan också använda Maclaurinserien för $\arctan x$:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{om} \quad |x| < 1, \qquad \text{så} \quad \arctan\frac{1}{5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

med $x = 1/5$. Serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är alternerande, och $|a_k| = 1/\big(5^{2k+1}(2k+1)\big) \searrow 0$ då $k \to \infty$, så serien är en Leibnizserie. Feluppskattningen $|s - s_n| \le |a_{n+1}|$ för sådana serier ger, med $n = 0$,

$$\left|\arctan\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right| = |s - s_0| \le |a_1| = \frac{1}{5^3\cdot 3} = \frac{1}{375} \le \frac{1}{100},$$

ty $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \arctan(1/5)$, seriens summa, och $s_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 = 1/5$, delsumman med nummer $n = 0$ (som alltså består av en enda term).

5. Notera att $\frac{2k+3}{k+1} = 2 + \frac{1}{k+1}$. Vi beräknar därför

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \qquad \text{och} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)} = 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}(k+1)}$$

separat.

Vi startar med den geometriska serien:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Ur denna får vi genast, med $x = 1/3$, att $S_1 = 1/(1-1/3) = 3/2$. Integration av $(*)$ ger sedan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) + C = \Big/ \text{insättning av } x = 0 \Rightarrow C = 0 \Big/ = -\ln(1-x), \qquad |x| < 1,$$

som med $x = 1/3$ ger $S_2/3 = -\ln(1-1/3) = \ln(3/2)$, d.v.s. $S_2 = 3\ln(3/2)$. Således blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3^k(k+1)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k(k+1)} = 2S_1 + S_2 = \underline{\underline{3 + 3\ln\frac{3}{2}}}.$$

6. Standardutvecklingar ger (med $t = -x^2$ i utvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2! + \mathcal{O}(t^3)$)

$$\begin{aligned}
f(x) &= A\,e^{-x^2} + B\ln(1+x) + C\arctan x + \sin x \\
&= A\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \mathcal{O}(x^6)\right) + B\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)\right) \\
&\quad + C\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) \\
&= A + (B + C + 1)x + \left(-A - \frac{B}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{3} - \frac{C}{3} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{4}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5).
\end{aligned}$$

Beroende på vilken överlevande x^k-term, $k \geq 1$, som har lägst gradtal får vi därför följande fall vad gäller lokalt minimum för $f(x)$ då $x = 0$:

- Om $B + C + 1 \neq 0$ har vi *ej* lokalt minimum.
- Om $B + C + 1 = 0$ och $-A - B/2 \neq 0$ har vi
  - *ej* lokalt minimum om $-A - B/2 < 0$,
  - lokalt minimum om $-A - B/2 > 0$, d.v.s. om $2A + B < 0$.
- Om $B + C + 1 = 0$ och $-A - B/2 = 0$ har vi
  - *ej* lokalt minimum om $B/3 - C/3 - 1/6 \neq 0$,
  - lokalt minimum om $B/3 - C/3 - 1/6 = 0$, ty i detta fall är $(A, B, C) = (1/8, -1/4, -3/4)$ och därmed $A/2 - B/4 = 1/8 > 0$.

<u>Svar</u>: Precis då ($B + C + 1 = 0$ och $2A + B < 0$) eller $(A, B, C) = (1/8, -1/4, -3/4)$.

7. Sätt $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ för $x \in \mathbb{R}$. Då är $G'(x) = g(x)$, och eftersom vi antar att $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$ är konvergent och därmed att $\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt$ och $\int_0^{\infty} g(t)\,dt$ båda är konvergenta, följer att gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} G(x)$ existerar ändligt. Eftersom G dessutom är kontinuerlig (till och med deriverbar) finns det därför en konstant $A \geq 0$ sådan att $|G(x)| \leq A$ för alla x.

   Vidare, med integrerande faktor $e^{G(x)}$ får vi

$$\begin{aligned}
y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(y(x)\,e^{G(x)}\big) = h(x)\,e^{G(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x)\,e^{G(x)} = y(0)\,e^{G(0)} + \int_0^x h(t)\,e^{G(t)}dt \\
\text{(eftersom } y(0) = 0\text{)} \quad &\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{-G(x)}\int_0^x h(t)\,e^{G(t)}dt.
\end{aligned}$$

   Vi får därför

$$|y(x)| \leq e^A \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,e^A dt = e^{2A}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt,$$

   som är oberoende av x och ändligt ($= C$), eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt$ är konvergent enligt antagandet. Alltså är funktionen y begränsad, vilket skulle bevisas.