Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2019-03-18 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den allmänna lösningen till $y''' + 2y'' - 15y' = 30x - 65\cos x$.

2. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1-2k^2}$ (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$

   (c) Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx \le 2$

3. (a) Beräkna volymen av den kropp som uppstår när området $0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (2p)

   (b) Ange, som en integral (som inte ska beräknas), arean av den yta som uppstår när kurvan $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)

   För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna som används.

4. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 1 till funktionen $f(x) = \arctan x$ med restterm i Lagranges form. (1p)

   (b) Visa att $\left|\arctan(1/5) - 1/5\right| \le 1/100$. (2p)

5. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3^k(k+1)}$.

6. Bestäm för vilka värden på konstanterna A, B, C som funktionen

   $$f(x) = A\,e^{-x^2} + B\ln(1+x) + C\arctan x + \sin x$$

   har lokalt minimum för $x = 0$.

7. Antag att g och h är kontinuerliga (reellvärda) funktioner definierade på hela $\mathbb{R}$. Antag vidare att integralerna $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,dx$ är konvergenta. Visa att lösningen till differentialekvationen

   $$y'(x) + g(x)y(x) = h(x), \qquad y(0) = 0,$$

   är en begränsad funktion, d.v.s. att det finns en konstant C sådan att $|y(x)| \le C$ för alla $x \in \mathbb{R}$.