

Tentamen i Envariabelanalys 2

2019-03-18 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

- Bestäm den allmänna lösningen till $y''' + 2y'' - 15y' = 30x - 65 \cos x$.
 - (a) Avgör konvergens: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1 - 2k^2}$ (b) Avgör konvergens: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$
(c) Visa att $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \leq 2$
 - (a) Beräkna volymen av den kropp som uppstår när området $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (2p)
(b) Ange, som en integral (som inte ska beräknas), arean av den yta som uppstår när kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)
- För full poäng krävs principskisser som motiverar formlerna som används.
- (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 1 till funktionen $f(x) = \arctan x$ med restterm i Lagranges form. (1p)
(b) Visa att $|\arctan(1/5) - 1/5| \leq 1/100$. (2p)
 - Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3^k(k+1)}$.

- Bestäm för vilka värden på konstanterna A , B , C som funktionen

$$f(x) = A e^{-x^2} + B \ln(1+x) + C \arctan x + \sin x$$

har lokalt minimum för $x = 0$.

- Antag att g och h är kontinuerliga (reellvärda) funktioner definierade på hela \mathbb{R} . Antag vidare att integralerna $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx$ är konvergenta. Visa att lösningen till differentialekvationen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x), \quad y(0) = 0,$$

är en begränsad funktion, d.v.s. att det finns en konstant C sådan att $|y(x)| \leq C$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

TATA42 Envariabelanalys 2 2019-03-18, lösningsförslag

1. Karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 + 2r^2 - 15r = r(r - 3)(r + 5)$ har nollställena $r_1 = 0$, $r_2 = 3$ och $r_3 = -5$. Homogenlösningen blir därför

$$y_h = A + Be^{3x} + Ce^{-5x}.$$

För att finna en partikulärlösning y_p delar vi upp högerledet enligt $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, där $h_1(x) = 30x$ och $h_2(x) = -65 \cos x$, och söker partikulärlösningar till var och en av dessa.

Ansatsen $y_{p1} = ax^2 + bx$ ger $y'_{p1} = 2ax + b$, $y''_{p1} = 2a$ och $y'''_{p1} = 0$, och därmed är $y'''_{p1} + 2y''_{p1} - 15y'_{p1} = 0 + 2 \cdot 2a - 15(2ax + b) = (-30a)x + (4a - 15b)$, som blir lika med $30x$ för alla x om $-30a = 30$ och $4a - 15b = 0$, d.v.s. om $a = -1$ och $b = -4/15$; således duger $y_{p1} = -x^2 - 4x/15$.

Ansatsen $y_{p2} = a \cos x + b \sin x$ ger $y'_{p2} = -a \sin x + b \cos x$, $y''_{p2} = -a \cos x - b \sin x$ och $y'''_{p2} = a \sin x - b \cos x$, och därmed är $y'''_{p2} + 2y''_{p2} - 15y'_{p2} = (-2a - 16b) \cos x + (16a - 2b) \sin x$, som blir lika med $-65 \cos x = (-65) \cos x + 0 \sin x$ för alla x om $-2a - 16b = -65$ och $16a - 2b = 0$, d.v.s. om $a = 1/2$ och $b = 4$; $y_{p2} = (\cos x)/2 + 4 \sin x$ duger därför.

Linjariteten medför nu att alla lösningar till differentialekvationen ges av $y = y_h + (y_{p1} + y_{p2}) = A + Be^{3x} + Ce^{-5x} - x^2 - 4x/15 + (\cos x)/2 + 4 \sin x$.

$$\text{Svar: } y = A - \frac{4x}{15} - x^2 + Be^{3x} + Ce^{-5x} + \frac{\cos x}{2} + 4 \sin x.$$

2. (a) Sätt $a_k = \frac{k^2}{1 - 2k^2}$. Vi ser att $a_k = \frac{1}{1/k^2 - 2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ då $k \rightarrow \infty$, så $a_k \not\rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är därför divergent enligt Divergenstestet. Svar: Divergent.

- (b) Sätt $a_k = \frac{(-1)^k}{\ln k}$. Eftersom $\ln k > 0$ då $k \geq 2$ är serien $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ alternerande, och eftersom dessutom $|a_k| = \frac{1}{\ln k} \searrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ ($|a_k|$ avtar mot noll, d.v.s. $|a_2| \geq |a_3| \geq |a_4| \geq \dots$ och $|a_k| \rightarrow 0$) är serien en Leibnizserie, och därmed konvergent. Svar: Konvergent.

- (c) Eftersom $\sqrt{1+x^4} \geq 1$ och $\sqrt{1+x^4} \geq x^2$, till och med för alla $x \in \mathbb{R}$, gäller olikheterna

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1 \text{ då } 0 < x < 1 \quad \text{och} \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{x^2} \text{ då } 1 < x < \infty.$$

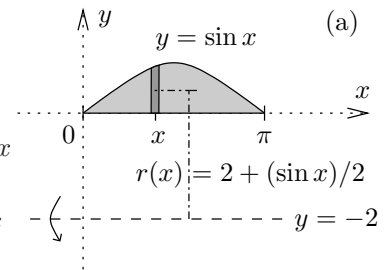
Således får vi

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \leq \int_0^1 1 dx + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = [x]_{x=0}^{x=1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x \rightarrow \infty} = 2.$$

3. Se principskisserna till höger.

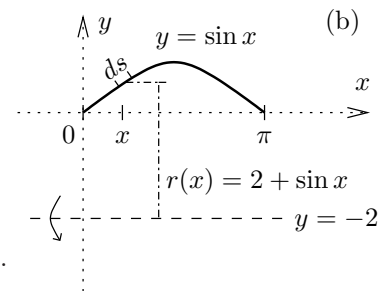
- (a) Areaelementet $dA(x) = (\sin x - 0) dx = \sin x dx$, tyngdpunktens väg $= 2\pi r(x) = 2\pi(2 + (\sin x)/2)$, så rotationsvolymen blir enligt Guldins regel

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} 2\pi(2 + (\sin x)/2) dA(x) = \int_0^{\pi} 2\pi(2 + (\sin x)/2) \sin x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} (4 \sin x + \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi} \left(4 \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \pi \left[-4 \cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{8\pi + \frac{\pi^2}{2}}}. \end{aligned}$$



- (b) Bågelementet $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = ds(x)$ för växande x , tyngdpunktens väg $= 2\pi r(x) = 2\pi(2 + \sin x)$, så rotationsarean blir enligt Guldins regel

$$A_{\text{rot}} = \int_0^{\pi} 2\pi(2 + \sin x) ds(x) = \underline{\underline{\int_0^{\pi} 2\pi(2 + \sin x) \sqrt{1 + \cos^2 x} dx}}.$$



4. (a) Derivering ger

$$f(x) = \arctan x, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

så

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(\xi) = -\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 1 ges av $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x , så vi får följande

$$\text{Svar: } \arctan x = x - \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} x^2 \text{ för något } \xi = \xi(x) \text{ mellan 0 och } x.$$

(b) Insättning av $x = 1/5$ i utvecklingen i (a) ger

$$\underbrace{\arctan \frac{1}{5}}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Approx.}} - \underbrace{\frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{5^2}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något ξ mellan 0 och $1/5$. Således får vi

$$\left| \arctan \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right| = \left| -\frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{5^2} \right| = \frac{|\xi|}{(1+\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{5^2} \leq \frac{1/5}{(1+0^2)^2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{125} \leq \frac{1}{100},$$

vilket skulle bevisas; notera att $|\xi| \leq 1/5$ och $1 + \xi^2 \geq 1 + 0^2$.

Alternativ lösning, oberoende av (a): Vi kan också använda Maclaurinserien för $\arctan x$:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{om } |x| < 1, \quad \text{så } \arctan \frac{1}{5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

med $x = 1/5$. Serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är alternerande, och $|a_k| = 1/(5^{2k+1}(2k+1)) \searrow 0$ då $k \rightarrow \infty$, så serien är en Leibnizserie. Feluppskattningen $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$ för sådana serier ger, med $n = 0$,

$$\left| \arctan \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right| = |s - s_0| \leq |a_1| = \frac{1}{5^3 \cdot 3} = \frac{1}{375} \leq \frac{1}{100},$$

ty $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \arctan(1/5)$, seriens summa, och $s_0 = \sum_{k=0}^0 a_k = a_0 = 1/5$, delsumman med nummer $n = 0$ (som alltså består av en enda term).

5. Notera att $\frac{2k+3}{k+1} = 2 + \frac{1}{k+1}$. Vi beräknar därför

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \quad \text{och} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}(k+1)}$$

separat.

Vi startar med den geometriska serien:

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Ur denna får vi genast, med $x = 1/3$, att $S_1 = 1/(1-1/3) = 3/2$. Integration av (*) ger sedan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) + C = \left/ \text{insättning av } x = 0 \Rightarrow C = 0 \right/ = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

som med $x = 1/3$ ger $S_2/3 = -\ln(1-1/3) = \ln(3/2)$, d.v.s. $S_2 = 3 \ln(3/2)$. Således blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3^k(k+1)} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)} = 2S_1 + S_2 = 3 + 3 \ln \frac{3}{2}.$$

6. Standardutvecklingar ger (med $t = -x^2$ i utvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2! + \mathcal{O}(t^3)$)

$$\begin{aligned} f(x) &= A e^{-x^2} + B \ln(1+x) + C \arctan x + \sin x \\ &= A \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \mathcal{O}(x^6) \right) + B \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\ &\quad + C \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) \right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\ &= A + (B + C + 1)x + \left(-A - \frac{B}{2} \right) x^2 + \left(\frac{B}{3} - \frac{C}{3} - \frac{1}{6} \right) x^3 + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{4} \right) x^4 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned}$$

Beroende på vilken överlevande x^k -term, $k \geq 1$, som har lägst gradtal får vi därför följande fall vad gäller lokalt minimum för $f(x)$ då $x = 0$:

- Om $B + C + 1 \neq 0$ har vi *ej* lokalt minimum.
- Om $B + C + 1 = 0$ och $-A - B/2 \neq 0$ har vi
 - *ej* lokalt minimum om $-A - B/2 < 0$,
 - lokalt minimum om $-A - B/2 > 0$, d.v.s. om $2A + B < 0$.
- Om $B + C + 1 = 0$ och $-A - B/2 = 0$ har vi
 - *ej* lokalt minimum om $B/3 - C/3 - 1/6 \neq 0$,
 - lokalt minimum om $B/3 - C/3 - 1/6 = 0$, ty i detta fall är $(A, B, C) = (1/8, -1/4, -3/4)$ och därmed $A/2 - B/4 = 1/8 > 0$.

Svar: Precis då $(B + C + 1 = 0$ och $2A + B < 0)$ eller $(A, B, C) = (1/8, -1/4, -3/4)$.

7. Sätt $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ för $x \in \mathbb{R}$. Då är $G'(x) = g(x)$, och eftersom vi antar att $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$ är konvergent och därmed att $\int_{-\infty}^0 g(t) dt$ och $\int_0^{\infty} g(t) dt$ båda är konvergenta, följer att gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x)$ existerar ändligt. Eftersom G dessutom är kontinuerlig (till och med deriverbar) finns det därför en konstant $A \geq 0$ sådan att $|G(x)| \leq A$ för alla x .

Vidare, med integrerande faktor $e^{G(x)}$ får vi

$$\begin{aligned} y'(x) + g(x)y(x) = h(x) &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y(x)e^{G(x)}) = h(x)e^{G(x)} \\ &\Leftrightarrow y(x)e^{G(x)} = y(0)e^{G(0)} + \int_0^x h(t)e^{G(t)} dt \\ (\text{eftersom } y(0) = 0) &\Leftrightarrow y(x) = e^{-G(x)} \int_0^x h(t)e^{G(t)} dt. \end{aligned}$$

Vi får därför

$$|y(x)| \leq e^A \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| e^A dt = e^{2A} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt,$$

som är oberoende av x och ändligt ($= C$), eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ är konvergent enligt antagandet. Alltså är funktionen y begränsad, vilket skulle bevisas.