SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2018-10-31

1 (a). $y' - 2xy = x^2 e^{x^2}$. Eftersom $(-x^2)' = -2x$ är e^{-x^2} en integrerande faktor. D.v.s.

$$(e^{-x^2}y)' = e^{-x^2}(y' - 2xy) = e^{-x^2}(x^2 e^{x^2}) = x^2,$$

vilket ger

$$e^{-x^2}y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right) e^{x^2}.$$

$y(0) = 2$ ger

$$y(0) = C = 2.$$

Svar: $y = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right) e^{x^2}$.

1 (b). $y = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right) e^{x^2}$ ger $y' = x^2 e^{x^2} + 2x\left(\frac{x^3}{3} + 2\right) e^{x^2}$. Insatt i $y' - 2xy$ får vi

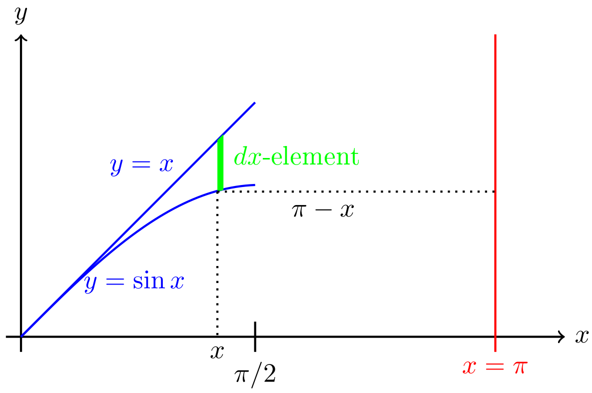
$$y' - 2xy = x^2 e^{x^2} + 2x\left(\frac{x^3}{3} + 2\right) e^{x^2} - 2x\left(\frac{x^3}{3} + 2\right) e^{x^2} = x^2 e^{x^2},$$

och

$$y(0) = \left(\frac{0^3}{3} + 2\right) e^{0^2} = 2e^0 = 2,$$

vilket visar att lösningen är korrekt.

2.



Det vinkelräta avståndet mellan dx–elementet i bilden ovan och $x = \pi$ är $\pi - x$, så tyngdpunktens väg vid rotationen är $2\pi(\pi - x)$. Arean för dx–elementet är $(x - \sin x)dx$. Så volymen blir enligt Guldins regel:

$$\int_0^{\pi/2} 2\pi(\pi - x)(x - \sin x)dx = 2\pi\left[\frac{\pi x^2}{2} + \pi\cos x - \frac{x^3}{3} - x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi(\pi^3 - 12\pi + 12)}{6}.$$

Svar: $\frac{\pi(\pi^3 - 12\pi + 12)}{6}$.

3 (a). Med $x = 1 + t$ får vi

$$f(x) = f(1+t) = t^2 \ln(1+t) = t^2(t + \mathcal{O}(t^2)) = t^3 + \mathcal{O}(t^4) = (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).$$

Svar: $f(x) = (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4)$.

3 (b). Eftersom
$$f(x) - f(1) = (x-1)^3(1 + \mathcal{O}(x-1)),$$
så ser vi att differensen $f(x) - f(1)$ växlar tecken när vi går från $x < 1$ till $x > 1$ ($(x-1)^3$ växlar tecken medan $1 + \mathcal{O}(x-1)$ inte gör det nära $x = 1$).

Svar: $x = 1$ är ingen extrempunkt.

3 (c). Eftersom $g(x) = \ln x$ uppfyller $g(1) = 0$, $g'(x) = 1/x$, $g'(1) = 1$ samt $g''(x) = -1/x^2$ får vi från Taylors sats med Lagranges restterm att
$$f(x) = (x-1)^2 \ln x = (x-1)^2\left(g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(\xi)}{2}(x-1)^2\right) = (x-1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4,$$
där ξ ligger mellan x och 1. Så om $p(x)$ betecknar Taylorpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ i 1 har vi
$$|f(x) - p(x)| = \left|-\frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4\right| = \frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4.$$
Notera nu att $|x-1| \leq 10^{-1}$ är samma sak som att $0.9 \leq x \leq 1.1$, så $\xi \geq 0.9$, vilket ger oss uppskattningen:
$$\frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}10^{-4} \leq 10^{-4},$$
om $|x-1| \leq 10^{-1}$.

4. Eftersom homogenlösnignen ges av $A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-3x}$ ska $r^2 + ar + b = (r-1)(r+3) = r^2 + 2r - 3$. D.v.s. $a = 2$ och $b = -3$.

$y = x\mathrm{e}^x$ insatt i $y'' + 2y' - 3y = (D-1)(D+3)y$ ger slutligen, via förskjutningsregeln,
$$(D-1)(D+3)(x\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x(D(D+4)x) = 4\mathrm{e}^x = g(x).$$

Svar: $a = 2, b = -3$ och $g(x) = 4\mathrm{e}^x$.

5 (a). $0 < \ln x \leq x$ på $]1, \infty[$ ger att
$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx,$$
och den sista integralen är känt konvergent. Så enligt jämförelseprincipen för positiva integrander är integralen konvergent.

(Notera att integralen också kan beräknas exakt, t.ex. via variabelbytet $x = e^t$ eller via partiell integration, och har värdet 1/4.)

Svar: Integralen är konvergent.

5 (b). Vi använder rotkriteriet:
$$\left|\frac{n+3}{n^3}\frac{x^{2n}}{3^n}\right|^{1/n} = \left|\frac{n+3}{n^3}\right|^{1/n}\frac{|x|^2}{3} \to \frac{|x|^2}{3} \text{ då } n \to \infty.$$
Alltså har vi konvergensradie $\sqrt{3}$. Test av ändpunkterna $x = \pm\sqrt{3}$ ger, eftersom $(n+3)/n^3 \leq 4/n^2$, och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent, att
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3}\frac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3}$$
är konvergent. Alltså konvergerar serien då $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Notera nu slutligen, eftersom alla termer är positiva, att
$$f(\sqrt{3}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3}\frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3} \geq \sum_{n=1}^{3}\frac{n+3}{n^3} = \frac{1+3}{1} + \frac{2+3}{8} + \frac{3+3}{27} = \frac{349}{72}.$$

Svar: Summan konvergerar för $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

6. Uppskattningen $|f(x) - x^2 e^{\sin x}| \leq \sin x^6$ samt $\sin x^6 = \mathcal{O}(x^6)$ ger att

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6).$$

Detta ger i sin tur att om $p(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad 5 till $x^2 e^{\sin x}$ så gäller

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6) = (p(x) + \mathcal{O}(x^6)) + \mathcal{O}(x^6) = p(x) + \mathcal{O}(x^6),$$

och entydighetssatsen ger nu att $p(x)$ även måste vara Maclaurinpolynomet till $f(x)$ av ordning 5 (notera dock att inget av ovanstående ger att $f(x) = x^2 e^{\sin x}$).

Vidare gäller, eftersom $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^4)$ och $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$ att

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} =$$

$$1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^3}{6} + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^4\right) =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$

Alltså gäller

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6) = x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) + \mathcal{O}(x^6) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6).$$

Svar: $f(x) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6).$

7. Eftersom $1 + t \leq e^t$ gäller för alla t får vi

$$(1 + 2^{-\alpha})(1 + 3^{-\alpha}) \cdots (1 + n^{-\alpha}) \leq e^{2^{-\alpha}} \cdot e^{3^{-\alpha}} \cdots e^{n^{-\alpha}} = e^{2^{-\alpha} + 3^{-\alpha} + \cdots + n^{-\alpha}}.$$

Alltså har produkten ett ändligt gränsvärde om $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} k^{-\alpha} < \infty$, vilket vi vet gäller om och endast om $\alpha > 1$.

Å andra sidan har vi

$$(1 + 2^{-\alpha})(1 + 3^{-\alpha}) \cdots (1 + n^{-\alpha}) \geq 1 + 2^{-\alpha} + 3^{-\alpha} + \cdots + n^{-\alpha},$$

vilket man ser bara genom att expandera produkten (och att alla termer är positiva). Alltså får vi att om produkten har ändligt gränsvärde så måste också $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} k^{-\alpha} < \infty$.

Så slutsatsen är att produkten konvergerar om och endast om $\alpha > 1$.

Alternativ lösning: Eftersom

$$(1 + 2^{-\alpha})(1 + 3^{-\alpha}) \cdots (1 + n^{-\alpha}) = e^{\sum_{k=2}^{n} \ln(1 + k^{-\alpha})}$$

gäller för varje n, och varje term $(1 + k^{-\alpha}) \geq 1$, ser vi att produkten konvergerar om och endast om $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + k^{-\alpha})$ är konvergent.

Eftersom $\ln(1 + t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ ger en direkt jämförelse, i fallet $\alpha > 0$, med $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha}$ att detta gäller om och endast om $\alpha > 1$. Om $\alpha \leq 0$ så går termerna i serien inte mot noll och därför är serien, och därmed även produkten, divergent.

Svar: $\alpha > 1$.