Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2018-10-31 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - 2xy = x^2 e^{x^2}$$

som är sådan att $y(0) = 2$. (2p)

(b) Verifiera genom insättning i ekvationen att din lösning är korrekt. (1p)

2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området

$$\sin x \le y \le x, \quad 0 \le x \le \pi/2$$

roteras ett varv runt linjen $x = \pi$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

3. Låt $f(x) = (x-1)^2 \ln x$.

(a) Bestäm Taylorutvecklingen till $f(x)$ av ordning 3 kring $x = 1$ med restterm på ordoform (restterm av grad 4).

(b) Avgör om $f(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 1$ (och ange i så fall vilken typ). (1p)

(c) Visa att $|f(x) - p(x)| \le 10^{-4}$ om $|x-1| \le 10^{-1}$, där $p(x)$ är *Taylorpolynomet* av grad 3 till $f(x)$ i $x = 1$. (1p)

4. Bestäm reella tal a, b och en funktion $g(x)$ sådana att

$$y = Ae^x + Be^{-3x} + xe^x$$

är den allmänna lösningen till $y'' + ay' + by = g(x)$.

VÄND!

5. (a) Avgör om $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ är konvergent. (1p)

(b) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

är konvergent. Visa även att $f\left(\sqrt{3}\right) \geq \dfrac{349}{72}$. (2p)

6. Antag att $f(x)$ uppfyller olikheten

$$|f(x) - x^2 \mathrm{e}^{\sin x}| \leq \sin(x^6) \quad \text{då} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Bestäm Maclaurinutvecklingen till $f(x)$ av ordning 5 med restterm på ordoform.

7. Avgör för vilka α som

$$\lim_{n\to\infty} \left((1+2^{-\alpha}) \cdot (1+3^{-\alpha}) \cdot \ldots \cdot (1+n^{-\alpha})\right)$$

existerar (och är ändligt).