

Tentamen i Envariabelanalys 2

2018-10-31 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - 2xy = x^2 e^{x^2}$$

som är sådan att $y(0) = 2$. (2p)

- (b) Verifiera genom insättning i ekvationen att din lösning är korrekt. (1p)

2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området

$$\sin x \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2$$

roteras ett varv runt linjen $x = \pi$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

3. Låt $f(x) = (x - 1)^2 \ln x$.

- (a) Bestäm Taylorutvecklingen till $f(x)$ av ordning 3 kring $x = 1$ med restterm på ordoform (restterm av grad 4).

- (b) Avgör om $f(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 1$ (och ange i så fall vilken typ). (1p)

- (c) Visa att $|f(x) - p(x)| \leq 10^{-4}$ om $|x - 1| \leq 10^{-1}$, där $p(x)$ är *Taylorpolynomet* av grad 3 till $f(x)$ i $x = 1$. (1p)

4. Bestäm reella tal a, b och en funktion $g(x)$ sådana att

$$y = Ae^x + Be^{-3x} + xe^x$$

är den allmänna lösningen till $y'' + ay' + by = g(x)$.

VÄND!

5. (a) Avgör om $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$ är konvergent. (1p)

(b) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

är konvergent. Visa även att $f(\sqrt{3}) \geq \frac{349}{72}$. (2p)

6. Antag att $f(x)$ uppfyller olikheten

$$|f(x) - x^2 e^{\sin x}| \leq \sin(x^6) \quad \text{då} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Bestäm Maclaurinutvecklingen till $f(x)$ av ordning 5 med restterm på ordoform.

7. Avgör för vilka α som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + 2^{-\alpha}) \cdot (1 + 3^{-\alpha}) \cdot \dots \cdot (1 + n^{-\alpha}))$$

existerar (och är ändligt).

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2018-10-31

1 (a). $y' - 2xy = x^2e^{x^2}$. Eftersom $(-x^2)' = -2x$ är e^{-x^2} en integrerande faktor. D.v.s.

$$(e^{-x^2}y)' = e^{-x^2}(y' - 2xy) = e^{-x^2}(x^2e^{x^2}) = x^2,$$

vilket ger

$$e^{-x^2}y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)e^{x^2}.$$

$y(0) = 2$ ger

$$y(0) = C = 2.$$

Svar: $y = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)e^{x^2}.$

1 (b). $y = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)e^{x^2}$ ger $y' = x^2e^{x^2} + 2x\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)e^{x^2}$. Insatt i $y' - 2xy$ får vi

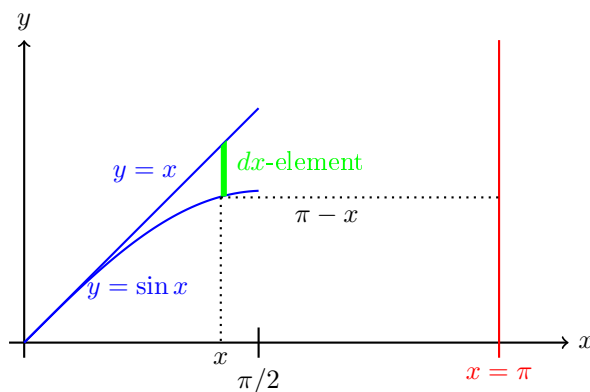
$$y' - 2xy = x^2e^{x^2} + 2x\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)e^{x^2} - 2x\left(\frac{x^3}{3} + 2\right)e^{x^2} = x^2e^{x^2},$$

och

$$y(0) = \left(\frac{0^3}{3} + 2\right)e^{0^2} = 2e^0 = 2,$$

vilket visar att lösningen är korrekt.

2.



Det vinkelräta avståndet mellan dx -elementet i bilden ovan och $x = \pi$ är $\pi - x$, så tyngdpunktens väg vid rotationen är $2\pi(\pi - x)$. Arean för dx -elementet är $(x - \sin x)dx$. Så volymen blir enligt Guldins regel:

$$\int_0^{\pi/2} 2\pi(\pi - x)(x - \sin x)dx = 2\pi \left[\frac{\pi x^2}{2} + \pi \cos x - \frac{x^3}{3} - x \cos x + \sin x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi(\pi^3 - 12\pi + 12)}{6}.$$

Svar: $\frac{\pi(\pi^3 - 12\pi + 12)}{6}.$

3 (a). Med $x = 1 + t$ får vi

$$f(x) = f(1 + t) = t^2 \ln(1 + t) = t^2(t + \mathcal{O}(t^2)) = t^3 + \mathcal{O}(t^4) = (x - 1)^3 + \mathcal{O}((x - 1)^4).$$

Svar: $f(x) = (x - 1)^3 + \mathcal{O}((x - 1)^4).$

3 (b). Eftersom

$$f(x) - f(1) = (x - 1)^3(1 + \mathcal{O}(x - 1)),$$

så ser vi att differensen $f(x) - f(1)$ växlar tecken när vi går från $x < 1$ till $x > 1$ ($(x - 1)^3$ växlar tecken medan $1 + \mathcal{O}(x - 1)$ inte gör det nära $x = 1$).

Svar: $x = 1$ är ingen extrempunkt.

3 (c). Eftersom $g(x) = \ln x$ uppfyller $g(1) = 0$, $g'(x) = 1/x$, $g'(1) = 1$ samt $g''(x) = -1/x^2$ får vi från Taylors sats med Lagranges restterm att

$$f(x) = (x - 1)^2 \ln x = (x - 1)^2 \left(g(1) + g'(1)(x - 1) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - 1)^2 \right) = (x - 1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x - 1)^4,$$

där ξ ligger mellan x och 1. Så om $p(x)$ betecknar Taylorpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ i 1 har vi

$$|f(x) - p(x)| = \left| -\frac{1}{2\xi^2}(x - 1)^4 \right| = \frac{1}{2\xi^2}|x - 1|^4.$$

Notera nu att $|x - 1| \leq 10^{-1}$ är samma sak som att $0.9 \leq x \leq 1.1$, så $\xi \geq 0.9$, vilket ger oss uppskattningen:

$$\frac{1}{2\xi^2}|x - 1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}|x - 1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}10^{-4} \leq 10^{-4},$$

om $|x - 1| \leq 10^{-1}$.

4. Eftersom homogenlösnigen ges av $Ae^x + Be^{-3x}$ ska $r^2 + ar + b = (r - 1)(r + 3) = r^2 + 2r - 3$. D.v.s. $a = 2$ och $b = -3$.

$y = xe^x$ insatt i $y'' + 2y' - 3y = (D - 1)(D + 3)y$ ger slutligen, via förskjutningsregeln,

$$(D - 1)(D + 3)(xe^x) = e^x(D(D + 4)x) = 4e^x = g(x).$$

Svar: $a = 2, b = -3$ och $g(x) = 4e^x$.

5 (a). $0 < \ln x \leq x$ på $]1, \infty[$ ger att

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$$

och den sista integralen är känt konvergent. Så enligt jämförelseprincipen för positiva integrander är integralen konvergent.

(Notera att integralen också kan beräknas exakt, t.ex. via variabelbytet $x = e^t$ eller via partiell integration, och har värdet $1/4$.)

Svar: Integralen är konvergent.

5 (b). Vi använder rotkriteriet:

$$\left| \frac{n + 3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n} \right|^{1/n} = \left| \frac{n + 3}{n^3} \right|^{1/n} \frac{|x|^2}{3} \rightarrow \frac{|x|^2}{3} \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Alltså har vi konvergensradie $\sqrt{3}$. Test av ändpunkterna $x = \pm\sqrt{3}$ ger, eftersom $(n + 3)/n^3 \leq 4/n^2$, och $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent, att

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n + 3}{n^3} \frac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n + 3}{n^3}$$

är konvergent. Alltså konvergerar serien då $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Notera nu slutligen, eftersom alla termer är positiva, att

$$f(\sqrt{3}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n + 3}{n^3} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n + 3}{n^3} \geq \sum_{n=1}^3 \frac{n + 3}{n^3} = \frac{1 + 3}{1} + \frac{2 + 3}{8} + \frac{3 + 3}{27} = \frac{349}{72}.$$

Svar: Summan konvergerar för $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

6. Uppskattningen $|f(x) - x^2 e^{\sin x}| \leq \sin x^6$ samt $\sin x^6 = \mathcal{O}(x^6)$ ger att

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6).$$

Detta ger i sin tur att om $p(x)$ är Maclaurinpolynomet av grad 5 till $x^2 e^{\sin x}$ så gäller

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6) = (p(x) + \mathcal{O}(x^6)) + \mathcal{O}(x^6) = p(x) + \mathcal{O}(x^6),$$

och entydighetssatsen ger nu att $p(x)$ även måste vara Maclaurinpolynomet till $f(x)$ av ordning 5 (notera dock att inget av ovanstående ger att $f(x) = x^2 e^{\sin x}$).

Vidare gäller, eftersom $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^4)$ och $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$ att

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)} =$$

$$1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^3}{6} + \mathcal{O}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^4\right) =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$

Alltså gäller

$$f(x) = x^2 e^{\sin x} + \mathcal{O}(x^6) = x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) + \mathcal{O}(x^6) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6).$$

$$\text{Svar: } f(x) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6).$$

7. Eftersom $1 + t \leq e^t$ gäller för alla t får vi

$$(1 + 2^{-\alpha})(1 + 3^{-\alpha}) \cdots (1 + n^{-\alpha}) \leq e^{2^{-\alpha}} \cdot e^{3^{-\alpha}} \cdots e^{n^{-\alpha}} = e^{2^{-\alpha} + 3^{-\alpha} + \cdots + n^{-\alpha}}.$$

Alltså har produkten ett ändligt gränsvärde om $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n k^{-\alpha} < \infty$, vilket vi vet gäller om och endast om $\alpha > 1$.

Å andra sidan har vi

$$(1 + 2^{-\alpha})(1 + 3^{-\alpha}) \cdots (1 + n^{-\alpha}) \geq 1 + 2^{-\alpha} + 3^{-\alpha} + \cdots + n^{-\alpha},$$

vilket man ser bara genom att expandera produkten (och att alla termer är positiva). Alltså får vi att om produkten har ändligt gränsvärde så måste också $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n k^{-\alpha} < \infty$.

Så slutsatsen är att produkten konvergerar om och endast om $\alpha > 1$.

Alternativ lösning: Eftersom

$$(1 + 2^{-\alpha})(1 + 3^{-\alpha}) \cdots (1 + n^{-\alpha}) = e^{\sum_{k=2}^n \ln(1+k^{-\alpha})}$$

gäller för varje n , och varje term $(1 + k^{-\alpha}) \geq 1$, ser vi att produkten konvergerar om och endast om $\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + k^{-\alpha})$ är konvergent.

Eftersom $\ln(1 + t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ ger en direkt jämförelse, i fallet $\alpha > 0$, med $\sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha}$ att detta gäller om och endast om $\alpha > 1$. Om $\alpha \leq 0$ så går termerna i serien inte mot noll och därför är serien, och därmed även produkten, divergent.

Svar: $\alpha > 1$.