Lösningsförslag envariabelanalys 2 2018-08-30

1. Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r^2 + 4)(r - 1).$$

Således ges lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

enligt känd sats. För att hitta partikulärlösningar utnyttjar vi superpositionsprincipen och hittar först en lösning till

$$p(D)y_{p_1} = 5e^x.$$

Eftersom $r = 1$ är en (enkel)rot till $p(r)$ så försöker vi med ansatsen $y_{p_1} = Axe^x$. Direkt derivering visar att

$$p(D)(Axe^x) = (3Ae^x + Axe^x) - (2Ae^x + Axe^x) + (4Ae^x + 4Axe^x) - 4Axe^x = 5Ae^x,$$

så om vi låter $A = 1$ gör det att högerledet blir $5e^x$. Givetvis kan vi ansätta $y_{p_1} = z(x)e^x$ istället och använda förskjutningssatsen (eller derivera på likt ovan) istället.

För att hitta en partikulärlösning till

$$p(D)y_{p_2} = -20x$$

ansätter vi $y_{p_2} = Ax + B$. Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(Ax + B) = 4A - 4(Ax + B) = -4Ax + 4A - 4B,$$

så $-4A = -20$ och $4A - 4B = 0$. Alltså är $A = B = 5$.

Svar: $C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + xe^x + 5x + 5$.

2. (a) Integranden är positiv och integralen är generaliserad i oändligheten. Vi ser direkt att

$$\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^7}\,dx \geq \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^7}\,dx \geq \int_0^1 \frac{1+0}{1+1}\,dx = \frac{1}{2},$$

vilket visar den första olikheten.

För att hitta en begränsning uppåt delar vi upp i två delar. Eftersom

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^7}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1+1}{1+0}\,dx = 2$$

och

$$\int_1^\infty \frac{1+x^2}{1+x^7}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{2x^2}{x^7}\,dx = 2\int_1^\infty \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{2}$$

så är

$$\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^7}\,dx \leq 2 + \frac{1}{2} \leq 3.$$

(b) Till exempel så kommer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$ att ha konvergensradien $R = 2$. Vi kan se detta från till exempel kvotkriteriet:

$$1 > \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^k}{2^k}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2.$$

Svar: (a) Se ovan (b) t ex $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$.

3. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$ för alla $t \in \mathbf{R}$ så är

$$e^{1/5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k}_{\text{approximation}} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k}_{\text{fel}}$$

för alla positiva heltal N. Vi söker N så att ”felet” (svansen på serien) blir $< 10^{-5}$. Vi ser att serien är positiv och

$$0 < \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \leq \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{5^{N+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5^N}.$$

Genom att testa oss fram observerar vi att med $N = 4$ blir

$$\frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5^N} = \frac{1}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^5} = \frac{1}{3 \cdot 10^5} < 10^{-5}.$$

Således är

$$e^{1/5} \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5^k\, k!}$$

med ett absolut fel på högst 10^{-5}.

Alternativt. Låt $f(x) = e^x$. Då är $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla positiva heltal n och

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^\xi}{5!}x^5,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Varför ordning 4? Vi kommer strax till det. Vi vill approximera $e^{1/5}$, så

$$e^{1/5} = f(1/5) = \underbrace{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} + \frac{1}{24 \cdot 5^4}}_{\text{approximation}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{120 \cdot 5^5}}_{\text{fel}},$$

där ξ ligger mellan 0 och 1/5. Eftersom $e^\xi \leq e^{1/5} < e^1 < 3$ så är

$$\left|\frac{e^\xi}{120 \cdot 5^5}\right| < \frac{3}{3 \cdot 5^3 \cdot 10^3} = \frac{1}{125000} < 10^{-5},$$

så är det absoluta felet $< 10^{-5}$.

Svar: $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} + \frac{1}{24 \cdot 5^4}$.

4. Ekvationen är *inte* linjär men av ordning ett. Vi skriver om ekvationen på en form där vi kan försöka separera variablerna:

$$y' = \frac{\cos 3x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \int y^2\,dy = \int \cos 3x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^3}{3} = C + \frac{1}{3}\sin 3x.$$

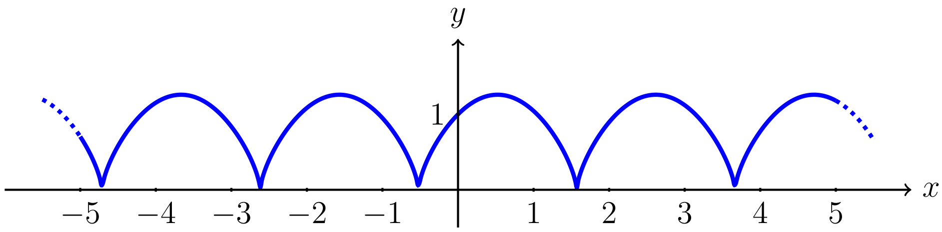
Vi söker lösningen där $y(0) = 1$, så

$$\frac{1}{3} = C + 0.$$

Således blir

$$y = (1 + \sin 3x)^{1/3}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Emmelertid finns här ett problem, då y faktiskt inte är deriverbar där $\sin 3x = -1$, dvs när $x = -\pi/6 + 2n\pi/3$ för $n \in \mathbf{Z}$. Faktum är att ekvationen inte ens är definierad i dessa punkter då $y = 0$ där. Största möjliga definitionsmängd ges därför av $]-\pi/6,\ \pi/2[$ eftersom vi har villkoret att $y(0) = 1$.



För att hitta Maclaurinutvecklingen har vi åtminstone två alternativ. Vi kan endera direkta ta fram den från ovanstående uttryck eller så deriverar vi differentialekvationen implicit (under antagandet att lösningen faktiskt existerar, men det har vi precis visat). Ifrån begynnelsevillkoret har vi att $y(0) = 1$, så $y'(0) = \dfrac{1}{1^2} = 1$ (direkt ur ekvationen med $x = 0$ och $y = 1$). Vidare gäller att

$$y''(x) = \frac{-3\sin 3x}{y^2} - \frac{2\cos 3x}{y^3} \cdot y'(x)$$

så $y''(0) = -2$. Vi deriverar en gång till:

$$y^{(3)}(x) = \frac{-9\cos 3x}{y^2} + \frac{6\sin 3x}{y^3} \cdot y'(x) + \frac{6y'(x)\,\sin 3x - 2y''(x)\,\cos 3x}{y^3} + \frac{6\cos 3x}{y^4} \cdot y'(x)^2,$$

vilket ger att $y^{(3)}(0) = -9 + 4 + 6 = 1$. Direkt insättning i Maclaurins formel visar att

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + O(x^4) = 1 + x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4).$$

Alternativt. Standardutvecklingar ger att

$$\begin{aligned}
y = {} & (1 + \sin 3x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{-1}{9}\sin^2 3x + \frac{5}{81}\sin^3 3x + O(\sin^4 3x) \\
&= 1 + \frac{1}{3}\left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + O(x^5)\right) + \frac{-1}{9}\left(3x + O(x^3)\right)^2 + \frac{5}{81}\left(3x + O(x^3)\right)^3 + O(x^4) \\
&= 1 + x - \frac{3x^3}{2} - x^2 + \frac{5(3x)^3}{81} + O(x^4) \\
&= 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{6} + O(x^4)
\end{aligned}$$

Svar: $y = (1+\sin 3x)^{1/3}$, $-\pi/6 < x < \pi/2$; $y(x) = 1 + x - x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$.

5. Vi delar upp serien i två delar. Under förutsättningen att vi visar att dessa är konvergenta så är det tillåtet. Alltså,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\sin(k\pi/2)}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{3^k}.$$

Vi ser att $\sin(k\pi/2) = 0$ om k är jämn och $\sin((2l+1)\pi/2) = (-1)^l$ för $l \in \mathbf{Z}$. Detta gör att den andra serien kan skrivas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{3^k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{3^{2l+1}} = \frac{1}{3}\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^l = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+1/9} = \frac{3}{10}.$$

För att hantera den första serien, låt oss introducera potensserien $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$. Konvergensradien är $R = 1$ (varför?) och för $|x| < 1$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(x^k\right) = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Med $x = \dfrac{1}{3}$ erhåller vi att

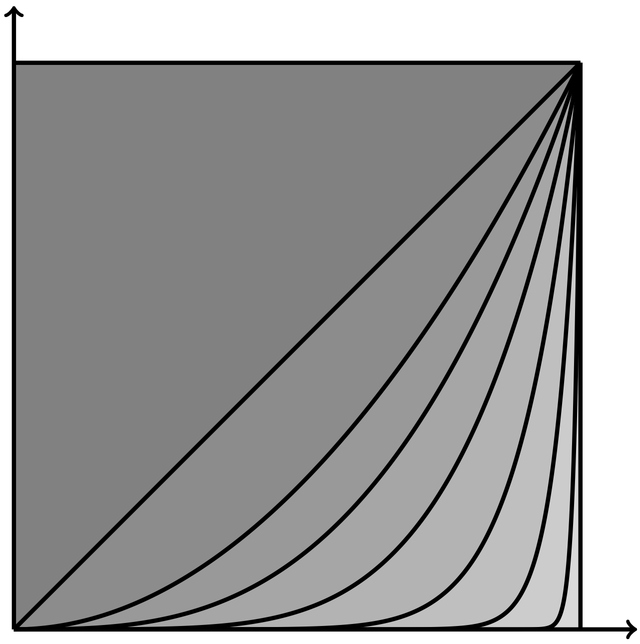
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{4}.$$

Eftersom båda serierna är konvergenta gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\sin(k\pi/2)}{3^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{10} = \frac{21}{20}.$$

Svar: $\dfrac{21}{20}$.

6. De olika områdena D_n uppfyller att $D_n \subset D_{n+1}$ och då $n \to \infty$ så kommer D_n att närma sig en kvadrat. Rimligen borde vi förvänta oss att tyngdpunkten för D_n kommer att närma sig $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ då $n \to \infty$. Sekvensen D_n av områden ser ut enligt nedan, där ljusare skuggning innebär att den delen av området läggs till vid större värden på n. För $n = 1$ är området triangeln ovanför linjen $y = x$ och för "$n = \infty$" är området kvadraten $[0,1] \times [0,1]$.



Enklaste sättet att identifiera tyngdpunkterna är nog att använda Pappos-Guldins regler baklänges. Vi låter A_n vara arean (den plana arean) av området D_n:

$$A_n = \int_0^1 (1 - x^n)\, dx = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Låt nu $V_{n,x}$ vara volymen som uppstår då D_n roterar ett varv kring x-axeln och $V_{n,y}$ vara volymen som uppstår när D_n roterar ett varv kring y-axeln. Om (x_n, y_n) är tyngdpunkten i D_n så gäller då att

$$V_{n,x} = 2\pi y_n \cdot A_n \quad \text{och} \quad V_{n,y} = 2\pi x_n \cdot A_n.$$

Vi beräknar rotationsvolymerna. Med skivformeln erhåller vi att

$$V_{n,x} = \pi \int_0^1 (1^2 - (x^n)^2)\, dx = \pi \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

och med rörformeln blir

$$V_{n,y} = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^n)\, dx = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \pi \left(1 - \frac{2}{n+2}\right).$$

Vi finner därmed att

$$y_n = \frac{V_{n,x}}{2\pi \cdot A_n} = \frac{1 - \frac{1}{2n+1}}{\frac{2n}{n+1}} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$$

och

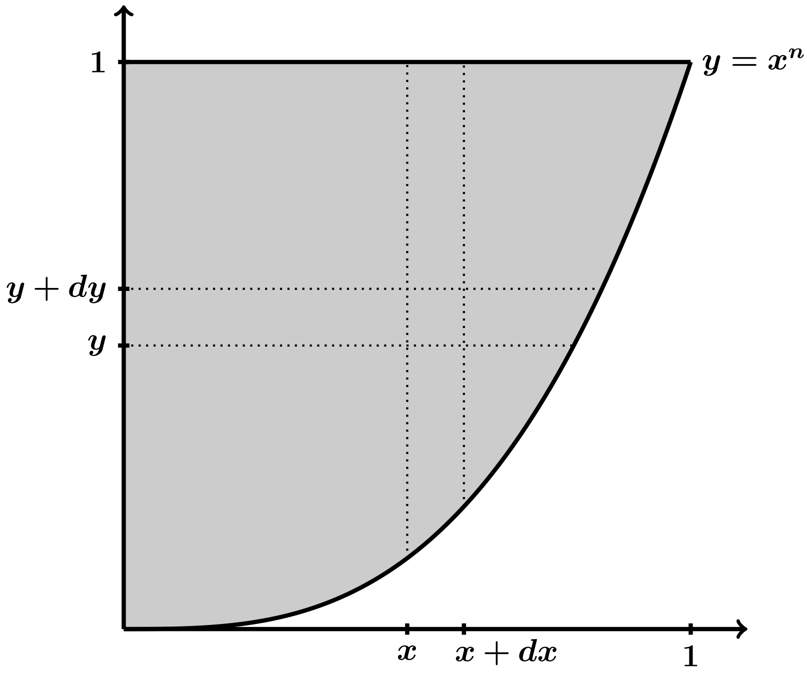
$$x_n = \frac{V_{n,y}}{2\pi \cdot A_n} = \frac{1 - \frac{2}{n+2}}{\frac{2n}{n+1}} = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n+4}.$$

Med dessa uttryck är det klart att

$$x_n = \frac{1 + 1/n}{2 + 4/n} \to \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad y_n = \frac{1 + 1/n}{2 + 1/n} \to \frac{1}{2},$$

då $n \to \infty$ (precis som vi misstänkte!).

Alternativt. Man kan även använda definitionen av tyngdpunkt direkt. För den som läst flervariabelanalys kanske denna variant är naturligare. Området ser ungefär ut enligt nedan (beroende på n).



Låt $dA_n(x) = (1 - x^n)\,dx$ vara ett areaelement med syfte på x, $0 \le x \le 1$. Då gäller att

$$x_n = \frac{1}{A_n}\int_0^1 x\,dA_n(x) = \frac{1}{A_n}\int_0^1 (x - x^{n+1})\,dx = \frac{1}{A_n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{2n+4} = \frac{n+1}{2n+4}.$$

På liknande sätt kan vi (eftersom $y = x^n \;\Leftrightarrow\; x = y^{1/n}$ då $0 \le x \le 1$) erhålla ett areaelement med syfte på y, $0 \le y \le 1$, enligt $dA_n(y) = y^{1/n}dy$. Använder vi detta kan vi se att

$$y_n = \frac{1}{A_n}\int_0^1 y\,dA_n(y) = \frac{1}{A_n}\int_0^1 y^{1+1/n}\,dy = \frac{1}{A_n}\cdot\frac{1}{2+1/n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Svar: $(x_n, y_n) = \left(\frac{n+1}{2n+4}, \frac{n+1}{2n+1}\right)$; $(x_n, y_n) \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ då $n \to \infty$.

7. Serien är alternerande (för varje x) och termernas belopp är monotont avtagande mot noll (för varje x):

$$\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k+1+|x|}\right| \le \left|\frac{(-1)^k}{k+|x|}\right|$$

för alla positiva heltal k och

$$\left|\frac{(-1)^k}{k+|x|}\right| = \frac{1}{k+|x|} \searrow 0 \text{ då } k \to \infty.$$

Enligt Leibniz kriterium är serien således konvergent. Eftersom serien är konvergent så gäller att

$$f(x) - f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k+|x|} - \frac{(-1)^k}{k+|y|} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k+|y| - (k+|x|)}{(k+|x|)(k+|y|)} \right)$$
$$= (|y| - |x|) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+|x|)(k+|y|)}.$$

Om vi studerar termerna i denna serie lite närmare ser vi att även detta är en Leibniz-serie (serien alternerar och termernas belopp avtar mot noll), så serien är till beloppet begränsad av beloppet av första termen:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+|x|)(k+|y|)} \right| \leq \frac{1}{(1+|x|)(1+|y|)} \leq 1.$$

Således kommer

$$|f(x) - f(y)| \leq \big| |y| - |x| \big| \leq |x - y|,$$

där vi använde omvända triangelolikheten i den sista olikheten.

Svar: se ovan.