Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2018-08-30 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar, i reell form, till differentialekvationen
$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 5e^x - 20x.$$

2. (a) Visa att $\dfrac{1}{2} \leq \displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^7}\,dx \leq 3.$ (2p)

   (b) Ange någon potensserie $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ som har konvergensradie $R = 2$. (1p)

3. Bestäm en rationell approximation till talet
$$e^{1/5}$$
som har ett fel vars absolutbelopp är högst 10^{-5}. Approximationen får skrivas som en summa av ändligt många rationella tal.

4. Bestäm den funktion $y(x)$ som i någon omgivning till $x = 0$ löser differentialekvationen
$$y' = \frac{\cos 3x}{y^2}, \quad y(0) = 1,$$
och Maclaurinutveckla $y(x)$, med rest $\mathcal{O}(x^4)$.

5. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{k + \sin(k\pi/2)}{3^k}$.

6. Låt $D_n = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^n \leq y \leq 1\}$, där $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bestäm tyngdpunkten (x_n, y_n) för D_n, och undersök $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$.

7. Visa att $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k + |x|}$ är konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$, samt visa att
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq |x - y| \text{ för alla } x, y \in \mathbb{R}.$$
Även en något sämre uppskattning kan ge poäng.