Lösningsförslag till TATA42-tentan 2018-06-02.

1. Då ekvationen är linjär av första ordningen löses den enklast med hjälp av integrerande faktor ($I.F.$). Skriv först ekvationen på standardform.

$$(1+x^2)y' - xy = \sqrt{1+x^2} \iff y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

För att ta fram integererande faktorn beräknar vi

$$-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow I.F. = e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Mulitplikation av ekvationen med $I.F.$ ger att

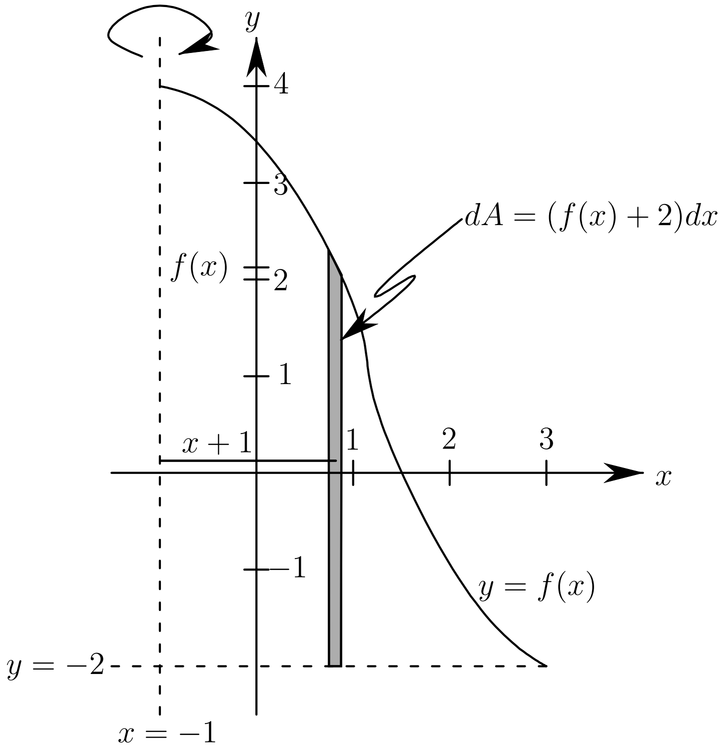
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \iff$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y = \arctan x + C \iff y = \sqrt{1+x^2}(\arctan x + C).$$

Villkoret att lösningen skall gå genom punkten $(0,1)$ betyder att $y(0)=1$ vilket ger

$$y(0) = \sqrt{1+0^2}(\arctan 0 + C) = C = 1$$

så att $y(x) = \sqrt{1+x^2}(1+\arctan x)$.

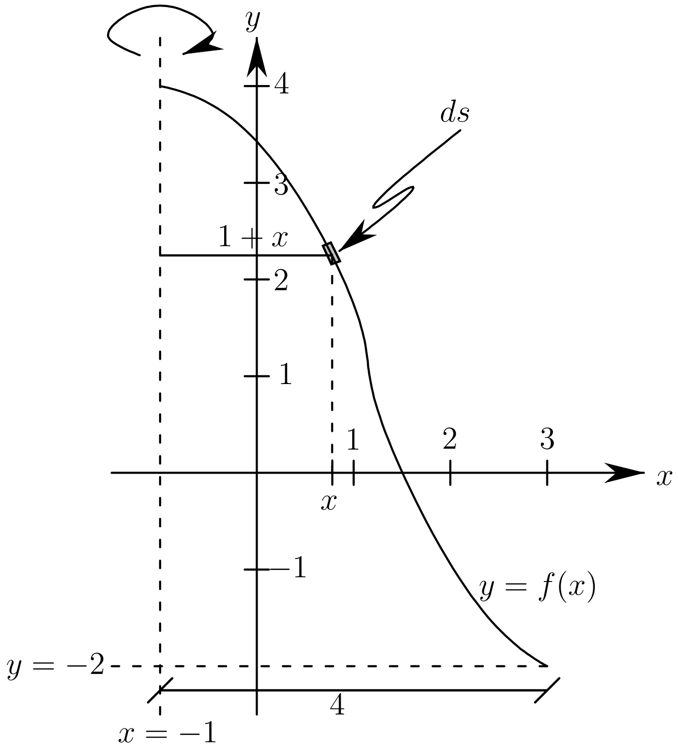
2. Vi börjar med en tydlig figur.



Med hjälp av denna figur och Pappos-Guldins regel får vi *rotationsvolymen*

$$dV = \text{T.P:s väg}\cdot dA = 2\pi(x+1)(f(x)+2)dx \Longrightarrow V = \int dV = 2\pi\int_{-1}^{3}(x+1)(f(x)+2)\,dx.$$

Vi ritar en kopia av tidigare figur och inför lite nya betckningar:



Med hjälp av denna figur och Pappos-Guldins regel får vi *rotationsarean*

$$
\begin{aligned}
dA_1 &= \text{T.P:s väg} \cdot ds = 2\pi(x+1)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \Longrightarrow \\
\Longrightarrow A_1 &= \int dA_1 = 2\pi \int_{-1}^{3}(x+1)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.
\end{aligned}
$$

Då radien på bottenplattan är 4 blir rotationskroppens totala begränsningsarea

$$
A = \pi 4^2 + A_1 = 16\pi + 2\pi \int_{-1}^{3}(x+1)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.
$$

3. (a) Vi började med att Maclaurinutveckla funktionerna i täljaren t.o.m ordning 3, d.v.s. med restterm av lägst grad 4.

$$
\begin{aligned}
\cos(\ln(1+2x)) &= \cos\left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right) = \cos\left(2x - 2x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(2x - 2x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(2x - 2x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)^4\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left((2x)^2 - 2{\cdot}2x{\cdot}2x^2 + \mathcal{O}\left(x^4\right)\right) + \mathcal{O}\left(x^4\left(2 - 2x + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)^4\right) = \\
&= 1 - 2x^2 + 4x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \\
e^{-2x^2} &= 1 - 2x^2 + \mathcal{O}\left(\left(-2x^2\right)^2\right) = 1 - 2x^2 + \mathcal{O}\left(x^4\right).
\end{aligned}
$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(\ln(1+2x)) - e^{-2x^2}}{x^3} &= \frac{1 - 2x^2 + 4x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) - \left(1 - 2x^2 + \mathcal{O}\left(x^4\right)\right)}{x^3} = \\
&= \frac{4x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right)}{x^3} = 4 + \mathcal{O}(x) \to 4
\end{aligned}
$$

då $x \to 0$.

(b) Vi ska undersöka om integralen är absolutkonvergent, så vi betraktar

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| dx = \int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| dx + \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| dx,$$

där integralen är generaliserad i både 0 och ∞ och därför måste delas upp i två. För $0 < x \leq 1$ har vi

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}+x^5} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ty $|\cos x| \leq 1$ och $\sqrt{x}+x^5 \geq \sqrt{x}$. Således är

$$0 \leq \int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

och vi vet att den sista integralen är konvergent enligt Sats 10.12 (b), sid 456, $\alpha{=}\frac{1}{2}{<}1$. För $x > 1$ är

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}+x^5} \leq \frac{1}{x^5},$$

ty $|\cos x| \leq 1$ och $\sqrt{x}+x^5 \geq x^5$, så

$$0 \leq \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^5}\, dx,$$

där vi vet att den sista integralen är konvergent enligt Sats 10.12 (a), sid 456, $\alpha = 5 > 1$.

Alltså är hela integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\, dx$ absolutkonvergent.

4. (a) För alla $k \geq 0$ gäller

$$a_k = \frac{3^k}{4^k+5^k} = \frac{3^k}{5^k}\frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^k} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^k = b_k.$$

Då $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty b_k$ är en geometrisk summa med kvot 3/5 och första term 1 ger Sats 10.3, sid 439 att serien är konvergent och

$$\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Följaktligen är $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{3^k}{4^k+5^k}$ både konvergent och $\leq \dfrac{5}{2}$ enligt Sats 10.6, sid 443.

(b) Vi använder rotkriteriet för att bestämma konvergensradien.

$$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k(1+\sqrt{k})}\right|^{1/k} = \frac{|x|^2}{4}\frac{1}{\left(1+\sqrt{k}\right)^{1/k}} = \frac{|x|^2}{4}\frac{1}{\underset{\to 1}{\sqrt{k^{1/k}}}}\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{1/k}}}_{\to 1} \to \frac{|x|^2}{4}$$

då $k \to \infty$ med hänvisning till standardgränsvärden. Följaktligen är potensserien

absolutkonvergent då $\dfrac{|x|^2}{4} < 1$ d.v.s. $|x| < 2$ och divergent då $|x| > 2$.

Återstår att undersöka $x = \pm 2$ som ju båda ger samma serie,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pm 2)^{2k}}{4^k(1+\sqrt{k})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 4^k}{4^k(1+\sqrt{k})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$$

som är konvergent enligt Sats 10.10, sid 452 (Leibniz kriterium); serien är alternerande och termernas belopp $= \dfrac{1}{1+\sqrt{k}}$ avtar mot 0 då $k \to \infty$. Följaktligen är serien konvergent då $|x| \leq 2$.

5. Vi taylorutvecklar de ingående funktionerna kring $x = 1$ och börjar med nämnaren, $N(x)$ för att se hur långt vi behöver utveckla.

$$N(x) = \sin \pi x, \qquad N(1) = \sin \pi = 0,$$
$$N'(x) = \pi \cos \pi x, \qquad N'(1) = \pi \cos \pi = -\pi.$$

Taylors formel ger då

$$\sin \pi x = -\pi(x-1) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right).$$

Alltså räcker det med taylorutveckling av ordning 1.

$$T_1(x) = \arctan\frac{1}{x+1}, \qquad T_1(1) = \arctan\frac{1}{2},$$
$$T_1'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2}\frac{-1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2+1}, \qquad T_1'(1) = -\frac{1}{5}.$$

Taylors formel ger igen att

$$\arctan\frac{1}{x+1} = \arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{5}(x-1) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right)$$

Vidare,

$$T_2(x) = \arctan\frac{x}{2}, \qquad T_2(1) = \arctan\frac{1}{2},$$
$$T_2'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\frac{1}{2} = \frac{2}{4+x^2}, \qquad T_2'(1) = \frac{2}{5}.$$

Taylors formel en sista gång ger att

$$\arctan\frac{x}{2} = \arctan\frac{1}{2} + \frac{2}{5}(x-1) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right).$$

Följaktligen

$$\frac{\arctan\dfrac{1}{x+1}-\arctan\dfrac{x}{2}}{\sin\pi x}=$$

$$=\frac{\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{5}(x-1)+\mathcal{O}\left((x-1)^2\right)-\left(\arctan\frac{1}{2}+\frac{2}{5}(x-1)+\mathcal{O}\left((x-1)^2\right)\right)}{-\pi(x-1)+\mathcal{O}\left((x-1)^3\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{3}{5}(x-1)+\mathcal{O}\left((x-1)^2\right)}{-\pi(x-1)+\mathcal{O}\left((x-1)^3\right)}=\frac{-\frac{3}{5}+\mathcal{O}\left(x-1\right)}{-\pi+\mathcal{O}\left((x-1)^2\right)}\to\frac{-\frac{3}{5}}{-\pi}=\frac{3}{5\pi}$$

då $x\to 1$.

6. Ansätt $\quad y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1+a_2x^2+\ldots$ och beräkna y' och y''.

Sats 10.16 (b), sid 465 ger

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}\Longrightarrow y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}.$$

Insättning i ekvationen ger efter omnumrering av serien för y'' att

$$\begin{aligned}y''-3x^2y'-9xy&=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-3\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k+1}-9\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=\\&=\sum_{k=-1}^{\infty}(k+3)(k+2)a_{k+3}x^{k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}(3k+9)a_kx^{k+1}-9a_0x=\\&=2\cdot1\cdot a_2+3\cdot2\cdot a_3x-9a_0x+\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+3)(k+2)a_{k+3}-3(k+3)a_k\right)x^{k+1}=\\&=\underbrace{2a_2+3(2a_3-3a_0)x+\sum_{k=1}^{\infty}(k+3)\left((k+2)a_{k+3}-3a_k\right)x^{k+1}}_{\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k}=0.\end{aligned}$$

Då sista radens vänsterled i sig är en potensserie som skall vara maclaurinserie för 0-funktionen måste alla koefficienterna, c_k i denna potensserie vara 0, d.v.s.

$$a_0=y(0)=0,a_1=y'(0)=1,2a_2=0\iff a_2=0,\quad 2a_3-3a_0=0\iff a_3=0$$

och för $k\geq 1$ fås rekursionsformeln

$$(k+2)a_{k+3}-3a_k=0\iff a_{k+3}=\frac{3}{k+2}a_k.$$

Detta ger

$\underline{k=1}$: $a_4=\frac{3}{3}a_1=1,$ $\quad\underline{k=2}$: $a_5=\frac{3}{4}a_2=0,$ $\quad\underline{k=3}$: $a_6=\frac{3}{5}a_3=0,$

$\underline{k=4}$: $a_7=\frac{3}{6}a_4=\frac{1}{2},$ $\quad\underline{k=5}$: $a_8=\frac{3}{7}a_5=0,$ $\quad\underline{k=6}$: $a_9=\frac{3}{8}a_6=0,$

$\underline{k=7}$: $a_{10}=\frac{3}{9}a_7=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3!},$ $\quad\underline{k=8}$: $a_8=\frac{3}{10}a_8=0,$ $\quad\underline{k=9}$: $a_{12}=\frac{3}{11}a_9=0,$

$\underline{k=10}$: $a_{13}=\frac{3}{12}a_{10}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{1}{4!},$ $\quad\underline{k=11}$: $a_{11}=\frac{3}{13}a_{11}=0,$ $\quad\ldots.$

Vi ser att de enda k-värden som ger nollskild koefficient är de där k kan skrivas som $k = 3m+1$ och att $a_{k=3m+1} = \dfrac{1}{m!}$. Insättning av $k = 3m+1$ i rekursionsformeln ger då

$$a_{(3m+1)+3} = a_{3(m+1)+1} = \frac{3}{(3m+1)+2} a_{3m+1} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{m!} = \frac{1}{(m+1)!}$$

vilket bekräftar mönstret. Följaktligen är

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \Big[\text{Endast } a_{k=3m+1} \neq 0\Big] = \sum_{m=0}^{\infty} a_{3m+1} x^{3m+1} = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{3m}$$

och serien är konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$ enligt, till exempel, kvotkriteriet:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{x^{3(m+1)}/(m+1)!}{x^{3m}/m!} \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{m!}{(m+1)!} \right| |x|^3 = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{1}{m+1} \right| |x|^3 = 0,$$

vilket ger en oändlig konvergensradie.

Anmärkning: notera även att

$$y(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(x^3\right)^m = x e^{x^3}.$$

7. Vi startar med ekvationen $y' + g(x)y = \sqrt{1+x^2}$, $y(0) = 0$. Eftersom y är en lösning för $x \geq 0$ är y kontinuerligt deriverbar för $x \geq 0$. Insättning av $x = 0$ i ekvationen ger att $y'(0) + g(0)y(0) = y'(0) + g(0) \cdot 0 = y'(0) = \sqrt{1+0^2} = 1$. Då $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ finns ett öppet intervall I med 0 som vänstra ändpunkt där $y(x) > 0$. Vi antar att y växlar tecken och visar att det leder till en motsägelse. I så fall är vårt antagande om att y har ett nollställe fel och därmed måste $y(x)$ vara positiv för alla $x > 0$ eftersom vi visat att $y(x) > 0$ på intervallet I ovan.
   Antag att x_0 är det första nollstället. Då är $y(x) > 0$ för $0 < x < x_0$ och insättning av x_0 i ekvationen ger

   $$y'(x_0) + g(x_0)y(x_0) = y'(x_0) + g(x_0)0 = y'(x_0) = \sqrt{1+x_0^2} > 1.$$

   Eftersom y' är kontinuerlig och $y'(x_0) > 1$ måste $y'(x)$ vara > 0 även i en omgivning av x_0. Det skulle innebära att den till vänster om x_0 positiva funktionen $y(x)$ växer mot 0. Detta är uppenbarligen en motsägelse och följaktligen är $y(x) > 0$ för $x > 0$.
   Vi observerar att även $z(x) > 0$ för $x > 0$ med samma bevis som ovan. För att visa att $y(x) > z(x)$ studerar vi $y - z$ och sätter in i den första ekvationen. Vi får

   $$\begin{aligned}(y-z)' + g(x)(y-z) &= y' + g(x)y - (z' + g(x)z) = \\ &= \sqrt{1+x^2} - (z' + h(x)z - h(x)z + g(x)z) = \\ &= \sqrt{1+x^2} - (\sqrt{1+x^2} - (h(x) - g(x))z) = \\ &= (h(x) - g(x))z > 0\end{aligned}$$

   enligt förutsättningarna och det som just visats om z, d v s $y - z$ uppfyller en första ordningens differentialekvation av samma typ som y och z gör. Observera att det enda som var viktigt med det ursprungliga högerledet $\sqrt{1+x^2}$ var att det var positivt för alla x. Följaktligen kommer samma bevis ytterligare en gång att ge att $y(x) - z(x) > 0$ för $x > 0$, d.v.s. $y(x) > z(x)$ för $x > 0$. **V.S.B.**

Man kan också visa detta genom att skriva upp och studera den formella lösningen. Låt $G(x)$ vara en primitiv funktion till g. Då $y(0) = 0$ och $I.F. = e^{G(x)}$ fås att

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y\right) &= e^{G(x)}\sqrt{1+x^2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \iff y(x) = e^{-G(x)} \int_0^x e^{G(t)}\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Då integralen av en positiv funktion är positiv och då $e^{-G(x)} > 0$ för alla x följer det direkt att $y(x) > 0$ för $x > 0$. Att $y(x) > z(x)$ visas p.s.s. som ovan genom att upprepa resonemanget på $y - z$.