Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2018-06-02 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$(1+x^2)y' - xy = \sqrt{1+x^2}$$
som går genom punkten $(0,1)$.

2. Om funktionen f vet man följande: f är kontinuerligt deriverbar och avtagande för $x \in [-1,3]$, $f(-1) = 4$ och $f(3) = -2$. Låt D vara det begränsade område som avgränsas av linjerna $x = -1$, $y = -2$ och kurvan $y = f(x)$, $-1 \leq x \leq 3$. Betrakta den rotationskropp som uppstår då området D roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Ange
   - rotationskroppens volym,
   - arean av kroppens begränsningsyta

   som integraler. (Den cirkulära bottenplattans area behöver ej anges som integral men skall vara med i ditt svar. **Tydlig(a) figur(er) krävs!**)

3. (a) Beräkna (1 p)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\ln(1+2x)) - e^{-2x^2}}{x^3}.$$
   (b) Är integralen (2 p)
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}+x^5}\,dx$$
   absolutkonvergent?

4. (a) Visa att (1 p)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k+5^k} \leq \frac{5}{2}.$$
   (b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien (2 p)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k(1+\sqrt{k})}?$$

Var god vänd!

5. Beräkna, t.ex. genom att använda Taylors formel, gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \dfrac{1}{x+1} - \arctan \dfrac{x}{2}}{\sin \pi x}.$$

6. Lös differentialekvationen

$$y'' - 3x^2y' - 9xy = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

t.ex. genom att ansätta en potensserie.

7. Funktionerna $h(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga och $h(x) > g(x) > 0$. Vidare, $y(x)$ och $z(x)$ är lösningar till differentialekvationerna

$$y' + g(x)y = \sqrt{1+x^2},\ \ y(0) = 0 \quad \text{respektive} \quad z' + h(x)z = \sqrt{1+x^2},\ \ z(0) = 0$$

för $x \geq 0$. Visa först att $y(x) > 0$ för alla $x > 0$ och sedan att $y(x) > z(x) > 0$ för alla $x > 0$.