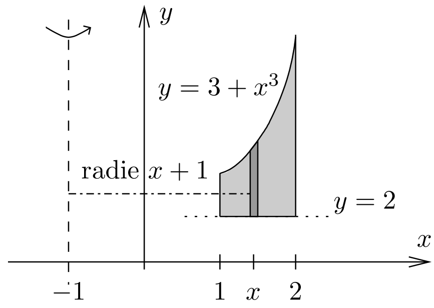
TATA42 Envariabelanalys 2 2018-03-12, lösningsförslag

1. Areaelementet $dA(x) = \big((3+x^3)-2\big)\,dx = (1+x^3)\,dx$, tyngdpunktens väg $= 2\pi(x+1)$, så rotationsvolymen blir enligt Guldins regel

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 dV(x) = \int_1^2 2\pi(x+1)\cdot dA(x) \\ &= \int_1^2 2\pi(x+1)\cdot(1+x^3)\,dx \\ &= 2\pi\int_1^2 (x^4+x^3+x+1)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2 \\ &= 2\pi\left(\frac{31}{5}+\frac{15}{4}+\frac{3}{2}+1\right) = \frac{249\pi}{10}. \end{aligned}$$



Svar: $\dfrac{249\pi}{10}$.

2. (a) Standardutvecklingen

$$(1+t)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1}t + \binom{1/3}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + \mathcal{O}(t^3)$$

med $t = 3x$ ger (notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$), tillsammans med standardutvecklingen för e^x,

$$\frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \frac{\big(1+x+x^2/2!+\mathcal{O}(x^3)\big) - \big(1+x-x^2+\mathcal{O}(x^3)\big)}{x^2} = \frac{3}{2} + \mathcal{O}(x) \to \frac{3}{2}$$

då $x \to 0$.

(b) Med bytet $t = 1/x$ och standardutvecklingen $\arctan t = t - t^3/3 + \mathcal{O}(t^5)$ får vi

$$x^2 - x^3 \arctan\frac{1}{x} = \frac{1}{t^2} - \frac{\arctan t}{t^3} = \frac{t - \big(t - t^3/3 + \mathcal{O}(t^5)\big)}{t^3} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(t^2) \to \frac{1}{3}$$

då $t \to 0^+$, d.v.s. då $x \to \infty$.

(c) $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + \mathcal{O}(x^6)$, så

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln\big(1 - x^2/2 + x^4/24 + \mathcal{O}(x^6)\big) \\ &= \big/\text{sätt } t = -x^2/2 + x^4/24 + \mathcal{O}(x^6),\ x \to 0 \Rightarrow t \to 0\big/ \\ &= \ln(1+t) = t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3) \\ &= \big(-x^2/2 + x^4/24 + \mathcal{O}(x^6)\big) - \big(x^4/4 + \mathcal{O}(x^6)\big)/2 + \mathcal{O}(x^6) \\ &= -x^2/2 - x^4/12 + \mathcal{O}(x^6), \end{aligned}$$

och

$$(\sin x)^2 = \big(x - x^3/3! + \mathcal{O}(x^5)\big)\big(x - x^3/3! + \mathcal{O}(x^5)\big) = x^2 - x^4/3 + \mathcal{O}(x^6).$$

Således blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(\cos x)} + \frac{2}{\sin^2 x} &= \frac{(\sin x)^2 + 2\ln(\cos x)}{\ln(\cos x)\cdot(\sin x)^2} = \frac{\big(x^2 - x^4/3 + \mathcal{O}(x^6)\big) + \big(-x^2 - x^4/6 + \mathcal{O}(x^6)\big)}{\big(-x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)\big)\big(x^2 + \mathcal{O}(x^4)\big)} \\ &= \frac{-x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)}{-x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{-1/2 + \mathcal{O}(x^2)}{-1/2 + \mathcal{O}(x^2)} \to \frac{-1/2}{-1/2} = 1 \end{aligned}$$

då $x \to 0$.

Svar: (a) $\dfrac{3}{2}$ (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) 1

3. Om $y = \tan x$ blir $y' = 1 + \tan^2 x$, $y'' = 2\tan x + 2\tan^3 x$ och $y''' = (2 + 6\tan^2 x)(1 + \tan^2 x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$ och därmed blir

$$y''' + 3y' = (2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x) + 3(1 + \tan^2 x) = 5 + 11\tan^2 x + 6\tan^4 x,$$

vilket skulle bevisas.

Enligt ovan är alltså $y_p = \tan x$ en partikulärlösning till den givna differentialekvationen. Homogenlösningarna bestäms av det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 + 3r = r(r - i\sqrt{3})(r + i\sqrt{3})$: $y_h = A + B\cos(x\sqrt{3}) + C\sin(x\sqrt{3})$, så

$$y = y_h + y_p = A + B\cos(x\sqrt{3}) + C\sin(x\sqrt{3}) + \tan x$$

är alla lösningar till differentialekvationen.

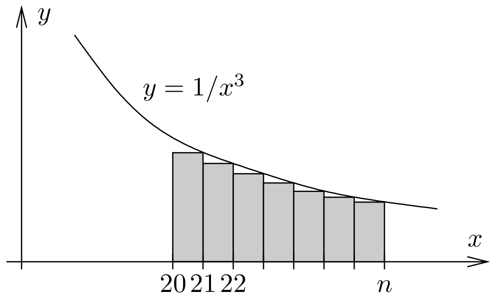
<u>Svar</u>: $y = A + B\cos(x\sqrt{3}) + C\sin(x\sqrt{3}) + \tan x$.

4. (a) För varje heltal $n \geq 21$ har staplarna i figuren sammanlagd area

$$\frac{1}{21^3}\cdot 1 + \frac{1}{22^3}\cdot 1 + \ldots + \frac{1}{n^3}\cdot 1 = \sum_{k=21}^{n} \frac{1}{k^3},$$

och denna area är uppenbarligen mindre än arean av området mellan x-axeln och kurvan $y = 1/x^3$ från $x = 20$ till $x = n$, så

$$\sum_{k=21}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \int_{20}^{n} \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{20}^{n} = \frac{1}{800} - \frac{1}{2n^2}.$$



Delsummorna till den positiva serien $\sum_{k=21}^{\infty}(1/k^3)$ är därmed uppåt begränsade av $1/800$. Serien är därför konvergent, och

$$\sum_{k=21}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{800},$$

vilket skulle bevisas.

(b) Sätt $a_k = (\ln k)^2 x^{2k}/4^k(k-1)$ för fixt x. Rotkriteriet ger

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|^2}{4}\cdot\sqrt[k]{\frac{(\ln k)^2}{k-1}} = \frac{|x|^2}{4}\cdot\exp\left(\frac{2\ln(\ln k) - \ln(k-1)}{k}\right) \to \frac{|x|^2}{4}\cdot e^0 = \frac{|x|^2}{4} = Q$$

då $k \to \infty$, och serien är absolutkonvergent om $Q < 1$, d.v.s. om $|x| < 2$, men divergent om $Q > 1$, d.v.s. om $|x| > 2$; således är konvergensradien $R = 2$.

(Alternativt kan man använda kvotkriteriet för fixt $x \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(\ln(k+1))^2 x^{2(k+1)}}{4^{k+1}(k+1-1)}\right| \Big/ \left|\frac{(\ln k)^2 x^{2k}}{4^k(k-1)}\right| = \frac{|x|^2}{4}\cdot\frac{k-1}{k}\left(\frac{\ln k + \ln(1+1/k)}{\ln k}\right)^2$$
$$= \frac{|x|^2}{4}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}\right)^2 \to \frac{|x|^2}{4} = Q, \qquad k \to \infty.)$$

Det återstår att undersöka ändpunkterna $x = \pm R = \pm 2$. Där får vi, i båda punkterna, samma positiva serie:

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)}(\pm 2)^{2k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{k-1}.$$

Eftersom $\ln k \geq \ln 3 > 1$ och $0 < k - 1 < k$ då $k \geq 3$ får vi uppskattningen

$$a_k = \frac{(\ln k)^2}{k-1} \geq \frac{1}{k}, \qquad k \geq 3.$$

Den positiva serien $\sum_{k=3}^{\infty}(1/k)$ är divergent eftersom den är en svans till den divergenta standardserien $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$. Eftersom $a_k \geq 1/k$ är även $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ divergent, enligt jämförelsekriteriet för positiva serier.

<u>Svar</u>: Potensserien konvergerar om och endast om $-2 < x < 2$.

5. Sätt $f(x) = \ln(1+x)$. Direkt uträkning av derivator ger

$$f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \text{ och } f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4},$$

så

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2 \text{ och } f^{(4)}(\xi) = -6(1+\xi)^{-4}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 3 för $\ln(1+x)$ blir därför

$$\begin{aligned}\underbrace{\ln(1+x)}_{\text{Exakt värde}} &= f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \\ &= \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{\text{Approximation}} \underbrace{- \frac{x^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}\end{aligned}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x.

(Om denna längd på utvecklingen räcker för att bevisa den önskade olikheten upptäcker vi vid feluppskattningen nedan. I annat fall är det bara att gå tillbaka och utveckla lite längre.)

Sätt $p(x) = x - x^2/2 + x^3/3$, och antag att $|x| \le 1/4$. Då måste ξ, som ju ligger mellan 0 och x för varje enskilt x, också vara instängt i intervallet $-1/4 \le \xi \le 1/4$; speciellt är $1+\xi \ge 3/4$ och därmed $1/(1+\xi)^4 \le 1/(3/4)^4$, så

$$\big|\ln(1+x) - p(x)\big| = \left|-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}\right| = \frac{|x|^4}{4(1+\xi)^4} \le \frac{(1/4)^4}{4(3/4)^4} = \frac{1}{4\cdot 3^4} = \frac{1}{4\cdot 81} = \frac{1}{324} < \frac{1}{300},$$

så längden på utvecklingen var således tillräcklig.

<u>Svar</u>: $p(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ duger.

Anmärkning. Om man t.ex. går ett steg längre i Maclaurinutvecklingen ovan visar det sig att polynomet $p(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4$ också duger, och approximationsfelets absolutbelopp blir nu högst $1/(5\cdot 3^5) = 1/1215$, alltså klart bättre än vad som krävs för att lösa uppgiften. Självklart går det bra att svara med detta polynom (eller med ett polynom man får vid en ännu längre utveckling), bara man visar att approximationsfelets belopp blir tillräckligt litet.

6. Integralekvationen är ekvivalent med

$$y' - \frac{\sqrt{4-y^2}}{x-x^2} = 0 \quad \text{(DE)} \qquad \text{och} \qquad y(1/2) = 1 \quad \text{(BV)},$$

vilket fås genom derivering av integralekvationen m.a.p. x respektive insättning av $x = 1/2$ i den.

(DE) är separabel, och eftersom vi söker en lösning i ett intervall som innehåller $x = 1/2$ och $4 - \big(y(1/2)\big)^2 = 3 > 0$ kan vi dividera (DE) med $\sqrt{4-y^2}$ och få

$$\text{(DE)} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \int \frac{dx}{x-x^2} + C,$$

om vi här låter $\int$ stå för *en* primitiv. Vi får då, t.ex. med bytet $y = 2t$ i y-integralen och partialbråksuppdelning i x-integralen,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \arcsin\frac{y}{2} \quad \text{och} \quad \int \frac{dx}{x-x^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|;$$

eftersom $x/(1-x) > 0$ i en omgivning till $x = 1/2$ kan beloppstecknet tas bort. Vi får alltså

$$\arcsin\frac{y}{2} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + C,$$

och (BV) bestämmer nu C:

$$\arcsin(1/2) = \ln 1 + C, \qquad \text{d.v.s.} \qquad C = \pi/6,$$

och när vi till sist löser ut y får vi följande <u>Svar</u>: $y = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right)$.

7. Vår serie är alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln k = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \ln 6 - \ln 7 + \dots$$

(Vi noterar att termerna inte går mot noll då $k \to \infty$, så serien är divergent enligt divergenstestet.)

Vi kan undersöka delsummorna s_{2m} genom att gruppera de ändligt många termerna parvis:

$$\begin{aligned} s_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k \ln k = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3) + (\ln 6 - \ln 5) + \dots + (\ln(2m) - \ln(2m-1)) \\ &= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{6}{5} + \dots + \ln\frac{2m}{2m-1} = \sum_{n=1}^{m}\ln\frac{2n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{m}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}_{a_n}. \end{aligned}$$

Här är $a_n > 0$, och med $b_n = 1/n$ och standardgränsvärdet $\big(\ln(1+t)\big)/t \to 1$ då $t \to 0$ får vi

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\ln\big(1+1/(2n-1)\big)}{1/(2n-1)} \cdot \frac{1/(2n-1)}{1/n} = \frac{\ln\big(1+1/(2n-1)\big)}{1/(2n-1)} \cdot \frac{1}{2-1/n} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = A$$

då $n \to \infty$, och eftersom $0 < A < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ är divergent är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform för positiva serier; det följer att $s_{2m} \to +\infty$ då $m \to \infty$.

Undersökningen av delsummorna s_{2m+1} blir likartad. Eftersom $\ln 1 = 0$ kan vi nu skriva

$$s_{2m+1} = -\left(\ln\frac{3}{2} + \ln\frac{5}{4} + \ln\frac{7}{6} + \dots + \ln\frac{2m+1}{2m}\right) = -\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{2n+1}{2n} = -\sum_{n=1}^{m}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{\text{Nytt } a_n},$$

och med ett resonemang som är närmast identiskt med det vi genomförde för s_{2m}, med samma b_n, får vi att $s_{2m+1} \to -\infty$ då $m \to \infty$.

Svar: $s_{2m} \to +\infty$ och $s_{2m+1} \to -\infty$ då $m \to \infty$.