

## Tentamen i Envariabelanalys 2

2017-10-26 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till ekvationen

$$xy' - 3y = x^5 \sin x, \quad x > 0$$

för vilken gäller att  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

2. För vilka  $\alpha > 0$  är integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^\alpha)x^\alpha}$$

konvergent?

3. Bestäm talen  $a, b \in \mathbb{R}$  så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x + \cos x} - e - ax - bx^2}{x^3}$$

existerar och bestäm gränsvärdet för detta val av  $a, b$ .

4. Betrakta kurvan  $y = x^2 + 4x$ ,  $1 \leq x \leq 3$ .

(a) Ange integralen för att beräkna längden av kurvan. (1 p)

(b) Ange integralen för att beräkna arean av den yta om uppkommer då kurvan roteras ett varv kring linjen  $x = -2$ . Beräkna också arean. (2 p)

För full poäng på del (b) krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

5. (a) Ange definitionen av att serien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  är *konvergent*.

(b) Konvergerar  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k}{\sqrt{1+k^3}}$ ?

(c) Bestäm alla reella  $x$  sådana att  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k} \sqrt{k}}{4^k}$  är konvergent.

6. Bestäm lösningen till ekvationen

$$y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

i form av en potensserie.

7. Om  $a_k > 0$  och  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{k}{k+1}$  för alla heltal  $k \geq 1$ , visa att  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  är divergent.