Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2017-08-24 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt V_1 vara volymen av den kropp K_1 som uppstår då mängden
$$D = \big\{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\big\}$$
roteras ett varv kring linjen $y = -1$. Bestäm en konstant $a \ge 0$ sådan att volymen V_2 av den kropp K_2 som uppstår då D i stället roteras ett varv kring linjen $x = -a$ blir lika stor som V_1.

2. Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen
$$y'' + 2y' + 5y = 5 + xe^{-x}$$
som är sådan att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$. För full poäng ska svaret ges i reell form.

3. (a) Maclaurinutveckla
$$(1+t)^{1/3}$$
till ordning 2 med restterm i Lagranges form. (1p)

   (b) Visa att
$$\left|\sqrt[3]{1+3x^2} - (1 + x^2 - x^4)\right| \le \frac{5x^6}{3}$$
för alla x. (2p)

4. (a) Ange definitionen av att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är *konvergent.*

   (b) Konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{k}} - \frac{1}{\tan\frac{1}{k}}\right)$?

   (c) Bestäm alla reella x sådana att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}}$ är konvergent.

5. Bestäm den kontinuerliga funktion $y(x)$ som uppfyller integralekvationen
$$y(x) + \int_0^x \frac{y(t)}{1+t}\,dt = e^{2x}, \qquad x > -1.$$

Var god vänd!

6. Låt
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + |\cos x|}.$$
Visa att $I \geq \pi/2$, och bestäm ett explicit tal B sådant att $I \leq B$.

7. Antag att $a_k > 0$ för alla $k \geq 1$ och att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent. Sätt $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

Visa att
$$\frac{a_n}{r_n} + \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n+k}}{r_{n+k}} > 1 - \frac{r_{n+k+1}}{r_n}$$
för $k \geq 1$, och använd detta för att avgöra om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ konvergerar eller divergerar.