Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2017-08-24 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt V_1 vara volymen av den kropp K_1 som uppstår då mängden
$$D = \big\{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\big\}$$
roteras ett varv kring linjen $y = -1$. Bestäm en konstant $a \ge 0$ sådan att volymen V_2 av den kropp K_2 som uppstår då D i stället roteras ett varv kring linjen $x = -a$ blir lika stor som V_1.

2. Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen
$$y'' + 2y' + 5y = 5 + xe^{-x}$$
som är sådan att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$. För full poäng ska svaret ges i reell form.

3. (a) Maclaurinutveckla
$$(1+t)^{1/3}$$
till ordning 2 med restterm i Lagranges form. (1p)

   (b) Visa att
$$\left|\sqrt[3]{1+3x^2} - (1 + x^2 - x^4)\right| \le \frac{5x^6}{3}$$
för alla x. (2p)

4. (a) Ange definitionen av att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är *konvergent.*

   (b) Konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{k}} - \frac{1}{\tan\frac{1}{k}}\right)$?

   (c) Bestäm alla reella x sådana att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}}$ är konvergent.

5. Bestäm den kontinuerliga funktion $y(x)$ som uppfyller integralekvationen
$$y(x) + \int_0^x \frac{y(t)}{1+t}\,dt = e^{2x}, \qquad x > -1.$$

Var god vänd!

6. Låt

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + |\cos x|}.$$

Visa att $I \geq \pi/2$, och bestäm ett explicit tal B sådant att $I \leq B$.

7. Antag att $a_k > 0$ för alla $k \geq 1$ och att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent. Sätt $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

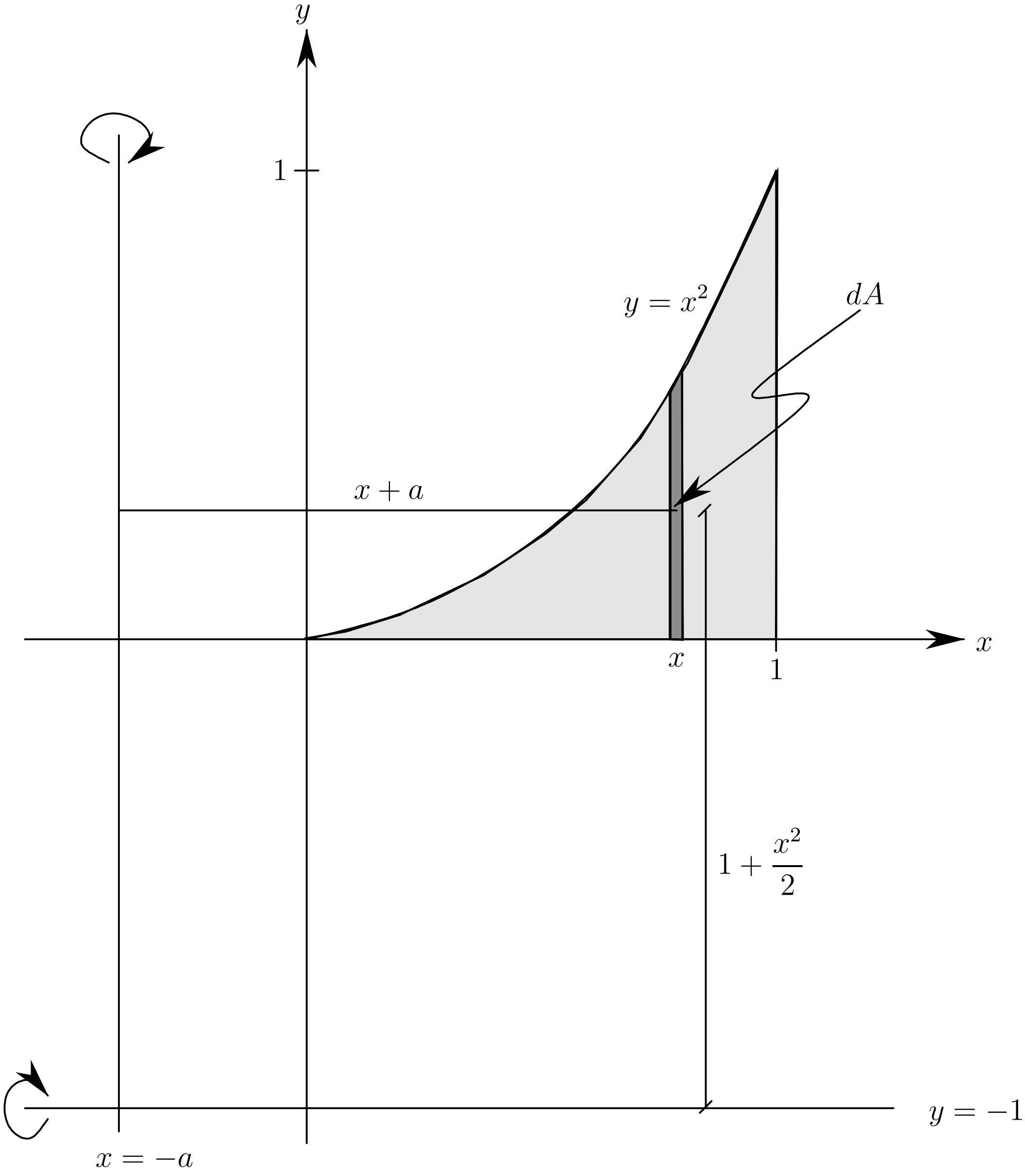
Visa att

$$\frac{a_n}{r_n} + \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n+k}}{r_{n+k}} > 1 - \frac{r_{n+k+1}}{r_n}$$

för $k \geq 1$, och använd detta för att avgöra om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ konvergerar eller divergerar.

Lösningsförslag till TATA42, Envariabelanalys, del 2, 2017–08–24

1. Betrakta nedanstående figur:



Vi använder Pappos-Guldins regel för att beräkna volymen som uppstår då areaelementet dA roteras kring respektive axel.

V_1: Tyngdpunktens avstånd till rotationsaxeln är här $= 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

$$dV_1 = \text{TP:s väg} \cdot dA = \underbrace{2\pi \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)}_{\text{TP:s väg}} \underbrace{x^2 dx}_{dA} = \pi(2x^2 + x^4)dx$$

$$V_1 = \int dV_1 = \pi \int_0^1 (2x^2 + x^4)dx = \pi \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{13\pi}{15}.$$

V_2: Tyngdpunktens avstånd till rotationsaxeln är här $= x + a$.

$$dV_2 = \text{TP:s väg} \cdot dA = \underbrace{2\pi\,(x+a)}_{\text{TP:s väg}} \underbrace{x^2 dx}_{dA} = 2\pi(x^3 + ax^2)dx$$

$$V_2 = \int dV_2 = 2\pi \int_0^1 (x^3 + ax^2)dx = 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{3}\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{2a}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

$$V_1 = V_2 \iff \frac{13}{15} = \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} \iff a = \frac{3}{2}\left(\frac{13}{15} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{26-15}{30} = \frac{11}{20}$$

Svar: $\quad a = \dfrac{11}{20}$

2. Ekvationen $y'' + 2y' + 5y = 5 + xe^{-x}$ ger det karakteristiska polynomet

$$P(r) = r^2 + 2r + 5 = (r+1)^2 + 4$$

som har nollställena $\quad r = -1 \pm 2i$. Följaktligen får vi att

$$y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Dela upp $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ där y_{p_1} är en lösning till $P(D)y_{p_1} = 5$ och y_{p_2} är en lösning till $P(D)y_{p_2} = xe^{-x}$. Linjäriteten ger då att $y_{p_1} + y_{p_2}$ är en partikulärlösning till $P(D)y = 5 + xe^{-x}$. Detta ger

y_{p_1}: $y''_{p_1} + 2y'_{p_1} + 5y_{p_1} = 5$ vilket ger att $y_{p_1} = 1$ är *en* partikulärlösning.

y_{p_2}: Sätt $y_{p_2} = e^{-x}z(x)$ och använd förskjutningsregeln. Då fås

$$P(D)y_{p_2} = P(D)(e^{-x}z) = e^{-x}P(D-1)z = e^{-x}\left(((D-1)+1)^2 + 4\right)z =$$
$$= e^{-x}\left(D^2 + 4\right)z = xe^{-x} \iff z'' + 4z = x.$$

Ansätt $\quad z = ax + b \Longrightarrow z' = a \Longrightarrow z'' = 0 \Longrightarrow z'' + 4z = 4ax + 4b = x \iff$

$$\iff a = \frac{1}{4},\ b = 0 \quad \text{så} \quad y_{p_2} = \frac{1}{4}xe^{-x} \quad \text{är } en \text{ partikulärlösning.}$$

Följaktligen, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = 1 + \dfrac{1}{4}xe^{-x}$ och

$$y = y_h + y_p = e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\right) + 1$$

$$y(0) = A + 1 = 0 \iff A = -1 \quad \text{så} \quad y = e^{-x}\left(-\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\right) + 1$$

$$y' = e^{-x}\left(\cos 2x - B\sin 2x - \frac{1}{4}x + 2\sin 2x + 2B\cos 2x + \frac{1}{4}\right)$$

$$y'(0) = 1 + 2B + \frac{1}{4} = 0 \iff B = -\frac{5}{8} \implies y = 1 - \frac{e^{-x}}{8}(8\cos 2x + 5\sin 2x - 2x)$$

Svar: $y = 1 - \dfrac{e^{-x}}{8}(8\cos 2x + 5\sin 2x - 2x)$

3. (a) Maclaurinutveckling av ordning 2 med restterm i Lagranges form ges av

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}t^3$$

för något tal ξ mellan 0 och t. Beräkning av de inblandade derivatorna ger

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{3}}, \quad f'(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(t) = -\frac{2}{9}(1+t)^{-\frac{5}{3}}, \quad f'''(t) = \frac{10}{27}(1+t)^{-\frac{8}{3}}$$

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{3}, \qquad f''(0) = -\frac{2}{9}, \qquad f'''(\xi) = \frac{10}{27(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}$$

så att

$$(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}t^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{10}{27(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}t^3 = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + \frac{5}{81(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}t^3$$

(b) Insättning av $t = 3x^2$ i utvecklingen i 3(a) ger

$$\sqrt[3]{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{3}(3x^2) - \frac{1}{9}(3x^2)^2 + \frac{5}{81(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}(3x^2)^3 =$$

$$= 1 + x^2 - x^4 + \frac{5}{3(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}x^6 \iff$$

$$\iff \left|\sqrt[3]{1+3x^2} - \left(1 + x^2 - x^4\right)\right| = \left|\frac{5}{3(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}x^6\right| = \frac{5}{3(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}x^6$$

Eftersom ξ är mellan 0 och $t = 3x^2 \geq 0$ följer det att $0 \leq \xi \leq 3x^2$ och därmed att

$$\frac{1}{(1+\xi)^{\frac{8}{3}}} \leq 1 \quad \text{så att} \quad \left|\sqrt[3]{1+3x^2} - \left(1 + x^2 - x^4\right)\right| = \frac{5}{3(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}x^6 \leq \frac{5}{3}x^6.\text{VSB.}$$

Svar: (a) $(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{9}t^2 + \dfrac{5}{81(1+\xi)^{\frac{8}{3}}}t^3$

4. (a) Låt $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$, $N = 1, 2, \ldots$. En serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges vara *konvergent* om dess delsummor S_N utgör en konvergent talföljd, dvs om $\lim_{N\to\infty} S_N$ existerar (ändligt).

(b) Tänk $\frac{1}{k} = t$. Då k är stort är t litet och vi kan använda Maclaurinutveckling.

$$a_k = \frac{1}{\sin\frac{1}{k}} - \frac{1}{\tan\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{k}} - \frac{\cos\frac{1}{k}}{\sin\frac{1}{k}} = \frac{1-\cos\frac{1}{k}}{\sin\frac{1}{k}} \stackrel{*}{=} \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)}{\frac{1}{k}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)}{\frac{1}{k}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)} = \frac{1}{k}\frac{\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}$$

Från omskrivningen före * ovan ser vi också att $a_k > 0$. Låt $b_k = \frac{1}{k}$. Då är

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)} \to \frac{1}{2}$$

då $k \to \infty$ och då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent ger Jämförelsesats II för positiva serier (Jämförelse på kvotform) att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent

(c) Vi använder Cauchys rotkriterium för att beräkna konvergensradien.

$$\left|\frac{x^k}{\sqrt{k}}\right|^{1/k} = \frac{|x|}{\underbrace{\sqrt{k^{1/k}}}_{\to 1 (\text{standard})}} \to |x|$$

då $k \to \infty$. Enligt Cauchys rotkriterium är serien absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent då $|x| > 1$ och $x = \pm 1$ måste därför kontrolleras separat.

$x = 1$: Då fås

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

som är divergent då det krävs att exponenten (1/2 i detta fall) skall vara större än 1 för konvergens.

$x = -1$: Då fås

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

som är konvergent enligt Leibniz kriterium eftersom serien är alternerande och termernas belopp, $\frac{1}{\sqrt{k}}$ avtar mot noll då $k \to \infty$.

Serien är alltså konvergent för $-1 \le x < 1$.

Svar: (b) divergent, (c) $-1 \le x < 1$.

5. Insättning av $x = 0$ i ekvationen ger

$$y(0) + \int_0^0 \frac{y(t)}{1+t} dt = \underline{\underline{y(0)}} = e^{2\cdot 0} = \underline{\underline{1}}.$$

Låt $x > -1$. Derivering av ekvationen ger sedan

$$y' + \frac{y(x)}{1+x} = 2e^{2x} \qquad \text{(Linjär ODE av ordning 1)}$$

$$\text{Integrerande faktor} = e^{\ln(1+x)} = 1 + x$$

Då hela ekvationen multipliceras med den integrerande faktorn kan vänsterledet skrivas som derivatan av en produkt,

$$\frac{d}{dx}((1+x)y) = \left((1+x)2e^{2x}\right) \iff (1+x)y = \int (1+x)2e^{2x} dx \overset{P.I.}{=}$$

$$= (1+x)e^{2x} - \int e^{2x} dx = (1+x)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$y(x) = e^{2x} + \frac{2C - e^{2x}}{2(1+x)} \implies y(0) = 1 + \frac{2C-1}{2} = 1 \iff C = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = e^{2x} + \frac{1 - e^{2x}}{2(1+x)} = \frac{(2x+1)e^{2x}+1}{2(x+1)}.$$

$\underline{\underline{\textbf{Svar}}}$**:** $y(x) = \dfrac{(2x+1)e^{2x}+1}{2(x+1)}$

6. Eftersom $\cos 0 = 1$ så är $\dfrac{1}{x^2 + |\cos x|} > 0$ och kontinuerlig för alla $x \geq 0$. Därmed är integralen endast generaliserad i ∞. Då

$$0 < \frac{1}{x^2 + |\cos x|} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \tag{1}$$

är konvergent följer det att

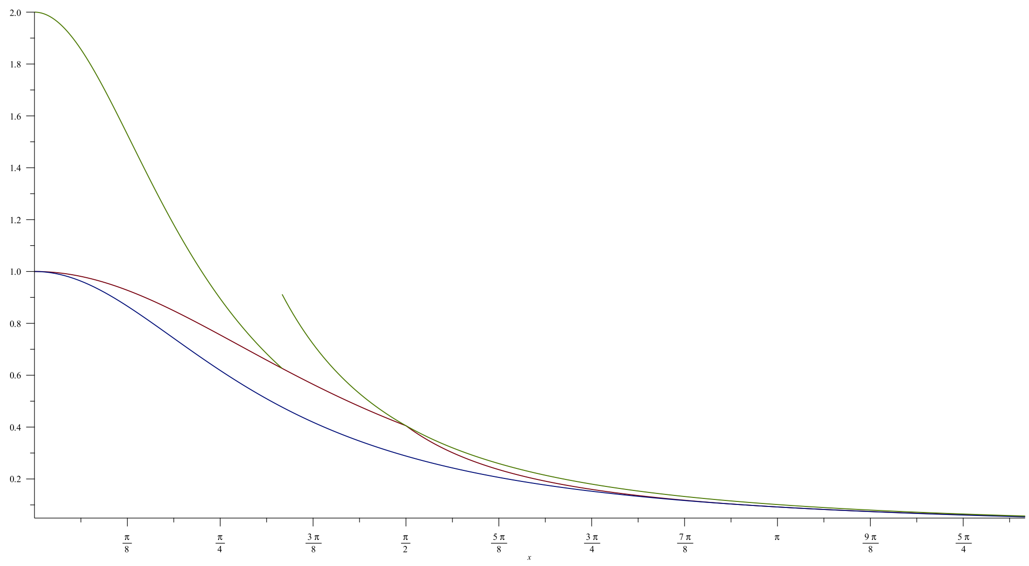
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\cos x|}$$

är konvergent enligt jämförelsesatsen. Följaktligen är också

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + |\cos x|}$$

konvergent.

Nedan ser du en graf av funktionerna som kommer användas i skattningarna tillsammans med den ursprungliga integranden. Notera att den ursprungliga integranden touchar både över- och underskattningen med jämna mellanrum.



Vidare,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+|\cos x|} \geq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_0^R = \frac{\pi}{2}$$

vilket visar den första olikheten. För att visa den andra olikheten använder vi samma olikhet som i (1), men då denna uppskattning inte funkar nära $x=0$ delar vi upp integralen, tex vid $x=\dfrac{\pi}{3}$.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+|\cos x|} = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x^2+|\cos x|} + \int_{\pi/3}^\infty \frac{dx}{x^2+|\cos x|}.$$

För $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ gäller $\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\leq \cos x$ så att

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x^2+|\cos x|} \leq \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}} = 2\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{2x^2+1} = 2\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2+1} =$$
$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x\right]_0^{\pi/3} = \sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

För $x\geq \pi/3$ gäller

$$\int_{\pi/3}^\infty \frac{dx}{x^2+|\cos x|} \leq \int_{\pi/3}^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\pi/3}^R = \frac{3}{\pi}.$$

Följaktligen är

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+|\cos x|} \leq \sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{3}{\pi}$$

vilket duger som "explicit tal". Vill man ha lite mer hum om hur stort detta är så kan man gå vidare, tex

$$\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{3}{\pi}\leq 2\cdot\frac{\pi}{2}+1<4+1=5$$

7. Då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så ger definitionen av konvergens (se uppgift 4(a)) att

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{s_n}=S.$$

Följaktligen gäller för $n\geq 2$ att

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{n-1}a_k+\sum_{k=n}^{\infty}a_k=s_{n-1}+r_n.$$

Då $\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=S$ följer det att $r_n\to 0$ då $n\to\infty$. Man brukar ibland kalla r_n för seriens "svans" och påståendet ovan att $r_n\to 0$ då $n\to\infty$ för "Svanssatsen", dvs en serie är konvergent om och endast om svansen går mot 0. Vi skall använda detta påstånde senare. Eftersom $a_k>0$ för alla k så följer också att r_n är avtagande, dvs

$$S=r_1>r_2>r_3>\ldots>0.$$

Följaktligen gäller

$$\frac{a_n}{r_n}+\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\ldots+\frac{a_{n+k}}{r_{n+k}}>\left[\begin{array}{c}r_n \text{ är den största nämnaren}\\ \text{större nämnare} \Longrightarrow \text{mindre tal}\end{array}\right]>\frac{a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}}{r_n}=$$

$$=\frac{(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+k})+(a_{n+k+1}+a_{n+k+2}+\ldots)-(a_{n+k+1}+a_{n+k+2}+\ldots)}{r_n}=$$

$$=\frac{r_n-r_{n+k+1}}{r_n}=1-\frac{r_{n+k+1}}{r_n}\qquad \text{VSB.}$$

Sätt $b_k=\dfrac{a_k}{r_k}$. Då är $b_k>0$ och vi skall använda svanssatsen till att avgöra om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent eller inte. Ur den nyss visade olikheten följer det att

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{a_k}{r_k}=\left(\frac{a_n}{r_n}+\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\ldots+\frac{a_{n+m}}{r_{n+m}}\right)>1-\frac{r_{n+m+1}}{r_n}\to 1$$

då $m\to\infty$ eftersom $r_{n+m+1}\to 0$ då $m\to\infty$. Följaktligen går svansen till $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *inte* mot 0 och serien är därmed divergent.