SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2017-06-02

1. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞. Eftersom

$$\frac{(\arctan x)/x\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \frac{\arctan x}{x} = \frac{x + \mathcal{O}(x^3)}{x} = 1 + \mathcal{O}(x^2) \to 1 \text{ då } x \to 0 \quad (0 < 1 < \infty),$$

och vi vet att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent,}$$

så ger jämförelseprincipen på gränsvärdesform att

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent.}$$

Notera att för $0 < x < \infty$ gäller

$$0 \leq \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{\pi/2}{x\sqrt{x}}.$$

Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent}$$

ger jämförelseprincipen att vi har

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \leq \frac{\pi}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx < \infty,$$

och alltså är även

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ konvergent.}$$

Eftersom både $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ och $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergenta är även

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ konvergent.}$$

Svar: Konvergent.

2. $2r^2 - 3r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ eller $r = -1/2$, så

$$y_h = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-x/2}.$$

Med substitutionen $y_p = z\mathrm{e}^{-x/2}$ insatt i ekvationen får vi

$$2(z\mathrm{e}^{-x/2})'' - 3(z\mathrm{e}^{-x/2})' - 2(z\mathrm{e}^{-x/2}) = 2(D-2)(D+1/2)(z\mathrm{e}^{-x/2}) = \text{/förskjutningsregeln/} =$$
$$2\mathrm{e}^{-x/2}(D - 5/2)Dz = 2\mathrm{e}^{-x/2}(z'' - 5z'/2) = 5\mathrm{e}^{-x/2}.$$

Detta kan vi lösa med $z' = -1$ så $z = -x$ duger. Så en partikulärlösning är $y_p = -xe^{-x/2}$. Detta ger

$$y = y_h + y_p = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-x/2} - xe^{-x/2}.$$

Bivillkoret ger nu

$$y(0) = A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A.$$

Svar: $y = A(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x/2}) - xe^{-x/2}$

3.

(a) Vi låter $f(x) = \cos 2x$ och använder Taylors formel:

$$f(x) = f(\pi/6) + f'(\pi/6)(x - \pi/6) + \frac{f''(\pi/6)}{2}(x - \pi/6)^2 + \mathcal{O}((x - \pi/6)^3).$$

$f(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$, $f'(x) = -2\sin 2x$, $f'(\pi/6) = -2\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}$, $f''(x) = -4\cos 2x$, $f''(\pi/6) = -4\cos(\pi/3) = -2$.

Svar: $\cos 2x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}(x - \pi/6) - (x - \pi/6)^2 + \mathcal{O}((x - \pi/6)^3)$.

(b)

$$\sqrt[k]{\frac{|x|^{2k}(k^2+1)}{5^k}} = \frac{|x|^2}{5}\sqrt[k]{k^2+1} \to \frac{|x|^2}{5} \text{ då } k \to \infty.$$

Alltså ges, enligt rotkriteriet, konvergensradien av $|x|^2/5 < 1$, d.v.s. $|x| < \sqrt{5}$.

Svar: Konvergensradien är $\sqrt{5}$

(c)

$$\frac{\sin^2 3x + \ln(1 - 9x^2)}{x^4} = \frac{(3x - (3x)^3/6 + \mathcal{O}(x^5))^2 + (-9x^2 - (-9x^2)^2/2 + \mathcal{O}(x^6))}{x^4}$$
$$= \frac{-135x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} = -135/2 + \mathcal{O}(x^2) \to -135/2 \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $-135/2$

4.

$$y' + yy' - \frac{1}{2}e^x = 0 \Leftrightarrow (1+y)y' = \frac{1}{2}e^x.$$

Ekvationen är alltså separabel och vi integrerar nu bägge sidor:

$$\int (1+y)dy = \int \frac{1}{2}e^x dx$$

vilket ger

$$y + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + C) \Leftrightarrow y^2 + 2y = \mathrm{e}^x + C.$$

Bivillkoret ger nu $y(0)^2 + 2y(0) = 9 - 6 = 3 = \mathrm{e}^0 + C$, d.v.s. $C = 2$. Ekvationen

$$y^2 + 2y = \mathrm{e}^x + 2$$

har lösningarna

$$y = -1 \pm \sqrt{3 + e^x},$$

men bivillkoret ger att den sökta lösningen är

$$y = -1 - \sqrt{3 + \mathrm{e}^x}.$$

Notera att denna löser ekvationen för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y = -1 - \sqrt{3 + \mathrm{e}^x}$, $-\infty < x < \infty$.

5. Vi har

$$\sinh x =$$
$$\frac{1}{2}\left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^7)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^7)\right)\right)$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7).$$

Eftersom sinh är en udda funktion är även dess invers udda. Alltså gäller

$$\text{arsinh}x = C_1x + C_3x^3 + C_5x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{arsinh}(\sinh x) = C_1 \sinh x + C_3(\sinh x)^3 + C_5(\sinh x)^5 + \mathcal{O}((\sinh x)^7) \\
&= C_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right) + C_3\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right)^3 + C_5\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)\right)^5 + \mathcal{O}(x^7) \\
&= C_1 x + \left(\frac{C_1}{6} + C_3\right)x^3 + \left(\frac{C_1}{120} + \frac{C_3}{2} + C_5\right)x^5 + \mathcal{O}(x^7).
\end{aligned}$$

Detta kan bara gälla om

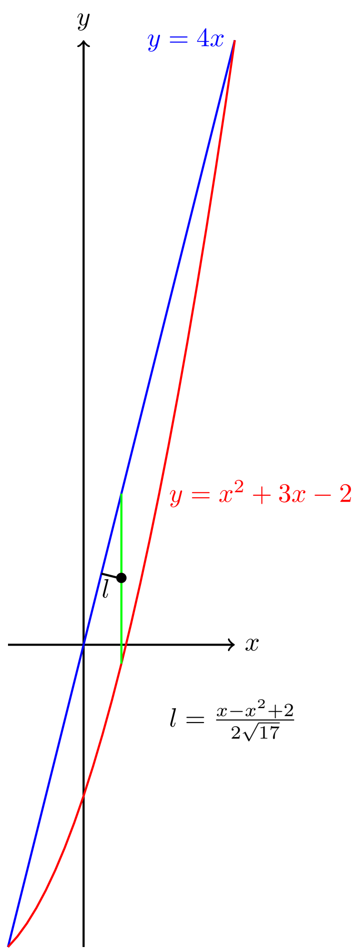
$$C_1 = 1, \quad \frac{C_1}{6} + C_3 = 0 \text{ och } \frac{C_1}{120} + \frac{C_3}{2} + C_5 = 0.$$

Detta ger $C_1 = 1$, $C_3 = -1/6$ och $C_5 = 3/40$.

Svar: $\operatorname{arsinh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$.

6. Eftersom $x^2 + 3x - 2 = 4x$ har lösningarna $x = -1$ och $x = 2$ ser vi att den kropp som söks uppstår då området $x^2 + 3x - 2 \leq y \leq 4x$, $-1 \leq x \leq 2$, roteras ett varv runt $y = 4x$. För ett givet $x \in [-1, 2]$ så har linjen med detta x-värde som ges av olikheten $x^2 + 3x - 2 \leq y \leq 4x$ tyngdpunkt i

$$\left(x, \frac{x^2 + 3x - 2 + 4x}{2}\right) = \left(x, \frac{x^2 + 7x - 2}{2}\right).$$



Tyngdpunktens väg för denna stolpe är således $\pi(x - x^2 + 2)/\sqrt{17}$. Alltså fås volymen enligt Pappos-Guldins regel av

$$\int_{-1}^{2} \frac{\pi(x - x^2 + 2)(x - x^2 + 2)}{\sqrt{17}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{17}} \left[4x + 2x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2} = \frac{\pi}{\sqrt{17}} \frac{81}{10}.$$

Svar: $\frac{\pi}{\sqrt{17}} \frac{81}{10}$.

7. Eftersom $|kx^k \sin k| \le k|x|^k$ ser vi att serien är absolutkonvergent om $|x| < 1$. Om $|x| \ge 1$ går inte termerna mot noll, så serien är divergent för dessa.

Först ser vi att

$$x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin k = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k,$$

så vi beräknar först $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin k$. Notera nu att $x^k \sin k = \mathrm{Im}((xe^i)^k)$. Detta gör att

$$\sum_{k=0}^{N} x^k \sin k = \mathrm{Im} \sum_{k=0}^{N} (xe^i)^k = \mathrm{Im} \frac{1 - (xe^i)^{N+1}}{1 - xe^i} = \mathrm{Im} \frac{(1 - (xe^i)^{N+1})(1 - xe^{-i})}{(1 - xe^i)(1 - xe^{-i})}$$
$$= \frac{x \sin 1 - x^{N+1} \sin(N+1) + x^{N+2} \sin N}{1 - 2x \cos 1 + x^2}.$$

Här ser vi att om $|x| < 1$ och vi låter $N \to \infty$ så får vi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin k = \frac{x \sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2}.$$

Slutligen gäller därför alltså för $|x| < 1$ att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k = x \frac{d}{dx} \frac{x \sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2} = \frac{(x - x^3) \sin 1}{(1 - 2x \cos 1 + x^2)^2}.$$

Svar: Serien konvergerar om och endast om $|x| < 1$, och för dessa x gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k = \frac{(x - x^3) \sin 1}{(1 - 2x \cos 1 + x^2)^2}.$$