

Tentamen i Envariabelanalys 2

2017-06-02 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Avgör om $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

2. Bestäm alla lösningar till

$$2y'' - 3y' - 2y = 5e^{-x/2}$$

sådana att $y(0) = 0$.

3. (a) Finn Taylorutvecklingen av ordning 2 för $\cos 2x$ kring $x = \frac{\pi}{6}$ med restterm på ordo-form.

(b) Hitta konvergensradien för $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}(1+k^2)}{5^k}$.

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x) + \ln(1-9x^2)}{x^4}$.

4. Hitta en lösning till

$$y' + yy' - \frac{1}{2}e^x = 0$$

sådan att $y(0) = -3$.

5. Definiera funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ för $x \in \mathbf{R}$. Denna funktion har en invers som brukar kallas $\operatorname{arsinh}(x)$ för $x \in \mathbf{R}$. Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 6 för $\operatorname{arsinh}(x)$.

6. Beräkna volymen av det begränsade område som uppstår då $y = x^2 + 3x - 2$ roterar ett varv kring linjen $y = 4x$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

7. Avgör för vilka reella x serien $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k$ är konvergent och beräkna seriens summa för dessa x .

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2017-06-02

1. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞ . Eftersom

$$\frac{(\arctan x)/x\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \frac{\arctan x}{x} = \frac{x + \mathcal{O}(x^3)}{x} = 1 + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow 0 \quad (0 < x < \infty),$$

och vi vet att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent,}$$

så ger jämförelseprincipen på gränsvärdesform att

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent.}$$

Notera att för $0 < x < \infty$ gäller

$$0 \leq \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{\pi/2}{x\sqrt{x}}.$$

Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent}$$

ger jämförelseprincipen att vi har

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \leq \frac{\pi}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx < \infty,$$

och alltså är även

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ konvergent.}$$

Eftersom både $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ och $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergenta är även

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ konvergent.}$$

Svar: Konvergent.

2. $2r^2 - 3r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ eller $r = -1/2$, så

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{-x/2}.$$

Med substitutionen $y_p = ze^{-x/2}$ insatt i ekvationen får vi

$$2(ze^{-x/2})'' - 3(ze^{-x/2})' - 2(ze^{-x/2}) = 2(D-2)(D+1/2)(ze^{-x/2}) = \text{/förskjutningsregeln/} = 2e^{-x/2}(D-5/2)Dz = 2e^{-x/2}(z'' - 5z'/2) = 5e^{-x/2}.$$

Detta kan vi lösa med $z' = -1$ så $z = -x$ duger. Så en partikulärlösning är $y_p = -xe^{-x/2}$. Detta ger

$$y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{-x/2} - xe^{-x/2}.$$

Bivillkoret ger nu

$$y(0) = A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A.$$

Svar: $y = A(e^{2x} - e^{-x/2}) - xe^{-x/2}$

3.

(a) Vi låter $f(x) = \cos 2x$ och använder Taylors formel:

$$f(x) = f(\pi/6) + f'(\pi/6)(x - \pi/6) + \frac{f''(\pi/6)}{2}(x - \pi/6)^2 + \mathcal{O}((x - \pi/6)^3).$$

$$f(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2, \quad f'(x) = -2 \sin 2x, \quad f'(\pi/6) = -2 \sin(\pi/3) = -\sqrt{3}, \quad f''(x) = -4 \cos 2x, \quad f''(\pi/6) = -4 \cos(\pi/3) = -2.$$

$$\text{Svar: } \cos 2x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}(x - \pi/6) - (x - \pi/6)^2 + \mathcal{O}((x - \pi/6)^3).$$

(b)

$$\sqrt[k]{\frac{|x|^{2k}(k^2 + 1)}{5^k}} = \frac{|x|^2}{5} \sqrt[k]{k^2 + 1} \rightarrow \frac{|x|^2}{5} \text{ då } k \rightarrow \infty.$$

Alltså ges, enligt rotkriteriet, konvergensradien av $|x|^2/5 < 1$, d.v.s. $|x| < \sqrt{5}$.

Svar: Konvergensradien är $\sqrt{5}$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 3x + \ln(1 - 9x^2)}{x^4} &= \frac{(3x - (3x)^3/6 + \mathcal{O}(x^5))^2 + (-9x^2 - (-9x^2)^2/2 + \mathcal{O}(x^6))}{x^4} \\ &= \frac{-135x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} = -135/2 + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow -135/2 \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Svar: $-135/2$

4.

$$y' + yy' - \frac{1}{2}e^x = 0 \Leftrightarrow (1 + y)y' = \frac{1}{2}e^x.$$

Ekvationen är alltså separabel och vi integrerar nu bägge sidor:

$$\int (1 + y)dy = \int \frac{1}{2}e^x dx$$

vilket ger

$$y + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(e^x + C) \Leftrightarrow y^2 + 2y = e^x + C.$$

Bivillkoret ger nu $y(0)^2 + 2y(0) = 9 - 6 = 3 = e^0 + C$, d.v.s. $C = 2$. Ekvationen

$$y^2 + 2y = e^x + 2$$

har lösningarna

$$y = -1 \pm \sqrt{3 + e^x},$$

men bivillkoret ger att den sökta lösningen är

$$y = -1 - \sqrt{3 + e^x}.$$

Notera att denna löser ekvationen för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y = -1 - \sqrt{3 + e^x}$, $-\infty < x < \infty$.

5. Vi har

$\sinh x =$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^7) \right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^7) \right) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7). \end{aligned}$$

Eftersom \sinh är en udda funktion är även dess invers udda. Alltså gäller

$$\operatorname{arsinh} x = C_1 x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Vi har nu

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arsinh}(\sinh x) = C_1 \sinh x + C_3 (\sinh x)^3 + C_5 (\sinh x)^5 + \mathcal{O}((\sinh x)^7) \\ &= C_1 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) \right) + C_3 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) \right)^3 + C_5 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) \right)^5 + \mathcal{O}(x^7) \\ &= C_1 x + \left(\frac{C_1}{6} + C_3 \right) x^3 + \left(\frac{C_1}{120} + \frac{C_3}{2} + C_5 \right) x^5 + \mathcal{O}(x^7). \end{aligned}$$

Detta kan bara gälla om

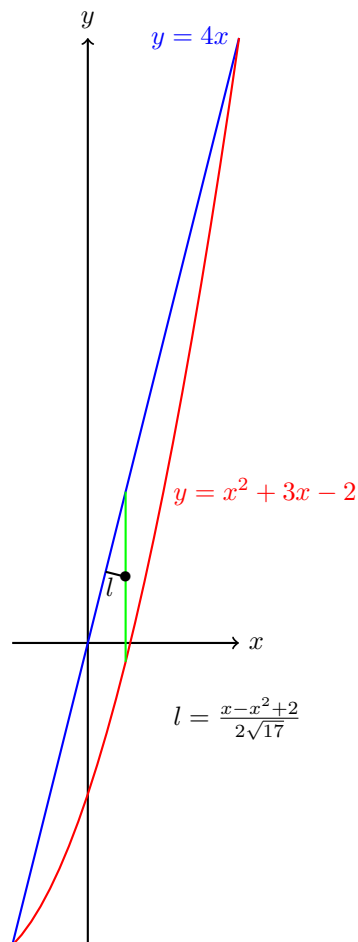
$$C_1 = 1, \quad \frac{C_1}{6} + C_3 = 0 \text{ och } \frac{C_1}{120} + \frac{C_3}{2} + C_5 = 0.$$

Detta ger $C_1 = 1$, $C_3 = -1/6$ och $C_5 = 3/40$.

$$\text{Svar: } \operatorname{arsinh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7).$$

6. Eftersom $x^2 + 3x - 2 = 4x$ har lösningarna $x = -1$ och $x = 2$ ser vi att den kropp som söks uppstår då området $x^2 + 3x - 2 \leq y \leq 4x$, $-1 \leq x \leq 2$, roteras ett varv runt $y = 4x$. För ett givet $x \in [-1, 2]$ så har linjen med detta x -värde som ges av olikheten $x^2 + 3x - 2 \leq y \leq 4x$ tyngdpunkt i

$$\left(x, \frac{x^2 + 3x - 2 + 4x}{2} \right) = \left(x, \frac{x^2 + 7x - 2}{2} \right).$$



Tyngdpunktens väg för denna stolpe är således $\pi(x - x^2 + 2)/\sqrt{17}$. Alltså fås volymen enligt Pappos-Guldins regel av

$$\int_{-1}^2 \frac{\pi(x - x^2 + 2)(x - x^2 + 2)}{\sqrt{17}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{17}} \left[4x + 2x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^2 = \frac{\pi}{\sqrt{17}} \frac{81}{10}.$$

Svar: $\frac{\pi}{\sqrt{17}} \frac{81}{10}$.

7. Eftersom $|kx^k \sin k| \leq k|x|^k$ ser vi att serien är absolutkonvergent om $|x| < 1$. Om $|x| \geq 1$ går inte termerna mot noll, så serien är divergent för dessa.

Först ser vi att

$$x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin k = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k,$$

så vi beräknar först $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin k$. Notera nu att $x^k \sin k = \text{Im}((xe^i)^k)$. Detta gör att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N x^k \sin k &= \text{Im} \sum_{k=0}^N (xe^i)^k = \text{Im} \frac{1 - (xe^i)^{N+1}}{1 - xe^i} = \text{Im} \frac{(1 - (xe^i)^{N+1})(1 - xe^{-i})}{(1 - xe^i)(1 - xe^{-i})} \\ &= \frac{x \sin 1 - x^{N+1} \sin(N+1) + x^{N+2} \sin N}{1 - 2x \cos 1 + x^2}. \end{aligned}$$

Här ser vi att om $|x| < 1$ och vi låter $N \rightarrow \infty$ så får vi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sin k = \frac{x \sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2}.$$

Slutligen gäller därför alltså för $|x| < 1$ att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k = x \frac{d}{dx} \frac{x \sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2} = \frac{(x - x^3) \sin 1}{(1 - 2x \cos 1 + x^2)^2}.$$

Svar: Serien konvergerar om och endast om $|x| < 1$, och för dessa x gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k \sin k = \frac{(x - x^3) \sin 1}{(1 - 2x \cos 1 + x^2)^2}.$$