TATA42 Envariabelanalys 2 2017-03-13, lösningsförslag

1. Eftersom $(2+\cos x)' = -\sin x$ får vi omedelbart att

$$(2+\cos x)y' - (\sin x)y = 4e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \big((2+\cos x)y\big)' = 4e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad (2+\cos x)y = 2e^{2x} + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 4$ ger $(2+1)\cdot 4 = 2 + C$, d.v.s. $C = 10$, och därmed $y = (2e^{2x}+10)/(2+\cos x)$.

<u>Svar</u>: $y = \dfrac{2e^{2x}+10}{2+\cos x}$.

(Alternativ början: Eftersom $2+\cos x > 0$ kan vi skriva om differentialekvationen till den ekvivalenta formen

$$(*) \qquad y' + \frac{-\sin x}{2+\cos x} y = \frac{4e^{2x}}{2+\cos x},$$

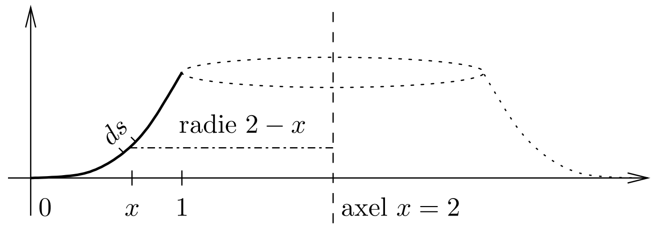
och koefficienten för y är $g(x) = (-\sin x)/(2+\cos x)$, med en primitiv $G(x) = \ln(2+\cos x)$ (sätt $t = \cos x$, t.ex.), så en integrerande faktor är $e^{G(x)} = \exp\big(\ln(2+\cos x)\big) = 2+\cos x$. Multiplikation av $(*)$ med denna gör att vi återfår den ursprungliga differentialekvationen. Därefter som ovan.)

2. Bågelementet är, när vi använder x som en växande parameter,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \Big/ \frac{dy}{dx} = x^{1/2} \Big/ = \sqrt{1+x}\, dx = ds(x).$$

(a) Kurvans längd är

$$L = \int_0^1 ds(x) = \int_0^1 (1+x)^{1/2}\, dx = \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(b) 

När bågelementet $ds = ds(x)$ vid x roterar kring axeln $x = 2$ skapar det ett cirkulärt band med radie $r(x) = 2 - x$ och sned kantlängd $ds(x)$ och därmed area $dA(x) = 2\pi r(x)\, ds(x)$. Vi får därför att arean av rotationsytan är

$$\begin{aligned} A_{\text{rot}} &= \int_0^1 2\pi(2-x)\, ds(x) = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1+x)^{1/2}\, dx = \Big/ t = 1+x \Big/ \\ &= 2\pi \int_1^2 (3t^{1/2} - t^{3/2})\, dt = 2\pi \left[\frac{3t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_1^2 = \frac{8\pi}{5}(3\sqrt{2}-2). \end{aligned}$$

<u>Svar</u>: (a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ (b) $\frac{8\pi}{5}(3\sqrt{2}-2)$

3. (a) Sätt $a_k = k \sin \frac{1}{k}$. Vi ser att $a_k = \dfrac{\sin(1/k)}{1/k} \to 1$ då $k \to \infty$ enligt standardgränsvärde, så $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$. Serien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är därför divergent, enligt Divergenstestet.

(b) Sätt $a_k = (-1)^k \tan \frac{1}{k}$. Eftersom $\tan \frac{1}{k} > 0$ då $k \geq 1$ är serien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ alternerande, och eftersom dessutom $|a_k| = \tan \frac{1}{k} \searrow 0$ då $k \to \infty$ ($|a_k|$ *avtar* mot noll, d.v.s. $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \ldots$ och $|a_k| \to 0$) är serien en Leibnizserie, och därmed konvergent.

(c) Sätt $f(x) = \dfrac{1}{1-\cos x}$. Vi ser att $f(x) \geq 0$ och att $\int_0^1 f(x)\, dx$ är generaliserad endast i 0. Vi får

$$f(x) = \frac{1}{1 - \big(1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)\big)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)} = g(x) \cdot \frac{1}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}$$

med $g(x) = 1/x^2$, och noterar att $g(x) \geq 0$ och att $\int_0^1 g(x)\,dx$ är generaliserad endast i 0. Vidare,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)} \to 2 \qquad \text{då } x \to 0^+,$$

och eftersom $0 < 2 < \infty$ säger Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att integralerna $\int_0^1 f(x)\,dx$ och $\int_0^1 g(x)\,dx$ antingen båda är konvergenta eller båda divergenta. Men $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (1/x^2)\,dx$ är divergent (standardintegral), och därmed är också $\int_0^1 f(x)\,dx$ divergent.

<u>Svar</u>: (a) Divergent (b) Konvergent (c) Divergent.

4. Karakteristiskt polynom $r^3 - 3r^2 + 9r + 13 = (r+1)(r^2 - 4r + 13) = \big(r+1\big)\big((r-2)^2 + 3^2\big)$, med nollställena $r_1 = -1$, $r_{2,3} = 2 \pm 3i$. Homogenlösningen blir därför

$$y_h = Ae^{-x} + e^{2x}(B\cos 3x + C\sin 3x).$$

För att finna en partikulärlösning y_p delar vi upp högerledet enligt $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, där $h_1(x) = 4 - 13x$ och $h_2(x) = 40\cos x$, och söker partikulärlösningar till var och en av dessa.

Ansatsen $y_{p1} = ax + b$ ger $y'_{p1} = a$ samt $y''_{p1} = 0 = y'''_{p1}$, och därmed $y'''_{p1} - 3y''_{p1} + 9y'_{p1} + 13y_{p1} = 9a + 13(ax+b) = 13ax + (9a + 13b)$, som blir lika med $4 - 13x$ för alla x om $13a = -13$ och $9a + 13b = 4$, d.v.s. om $a = -1$ och $b = 1$; således duger $y_{p1} = -x + 1$.

Ansatsen $y_{p2} = a\cos x + b\sin x$ ger $y'_{p2} = -a\sin x + b\cos x$, $y''_{p2} = -a\cos x - b\sin x$ och $y'''_{p2} = a\sin x - b\cos x$, och därmed är $y'''_{p2} - 3y''_{p2} + 9y'_{p2} + 13y_{p2} = (16a + 8b)\cos x + (-8a + 16b)\sin x$, som blir lika med $40\cos x$ för alla x om $16a + 8b = 40$ och $-8a + 16b = 0$, d.v.s. om $a = 2$ och $b = 1$; $y_{p2} = 2\cos x + \sin x$ duger därför.

Linjariteten ger slutligen att alla lösningar till differentialekvationen ges av $y = y_h + (y_{p1} + y_{p2}) = Ae^{-x} + e^{2x}(B\cos 3x + C\sin 3x) - x + 1 + 2\cos x + \sin x$.

<u>Svar</u>: $y = Ae^{-x} + e^{2x}(B\cos 3x + C\sin 3x) - x + 1 + 2\cos x + \sin x$.

5. Maclaurins formel för f av ordning 3 med restterm i Lagranges form:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}t^4$$

för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t.

(a) Med $f(t) = \cos t$ blir $f'(t) = -\sin t$, $f''(t) = -\cos t$, $f'''(t) = \sin t$ och $f^{(4)}(t) = \cos t$, varför $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$ och $f^{(4)}(\xi) = \cos\xi$, och därmed blir

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\cos\xi}{24}t^4$$

för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t.

(b) Med $t = x^2$ får vi

$$\underbrace{\int_0^{1/2} \cos(x^2)\,dx}_{\text{Exakt värde}} = \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\cos\xi}{24}x^8\right) dx = \underbrace{\int_0^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}x^4\right) dx}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{\cos\xi}{24}x^8\,dx}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x^2. Approximationen till integralen är $\int_0^{1/2}(1 - x^4/2)\,dx = [x - x^5/10]_0^{1/2} = 1/2 - 1/320 = 159/320$, så eftersom $|\cos\xi| \leq 1$ för alla $\xi \in \mathbf{R}$ får vi

$$\left|\int_0^{1/2} \cos(x^2)\,dx - \frac{159}{320}\right| = \left|\int_0^{1/2} \frac{\cos\xi}{24}x^8\,dx\right| \leq \int_0^{1/2} \left|\frac{\cos\xi}{24}x^8\right| dx$$

$$\leq \int_0^{1/2} \frac{x^8}{2^3 \cdot 3}\,dx = \left[\frac{x^9}{2^3 \cdot 3^3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2^{12} \cdot 3^3},$$

vilket skulle bevisas.

6. Ansätt $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < R$, där konvergensradien R ännu är okänd. Då blir $y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ och $y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$ för $|x| < R$. Alltså får vi

$$\begin{aligned}(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + 4\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big((k^2+3k+2)c_{k+2} + (k^2+3k+2)c_k \Big) x^k, \qquad |x| < R,\end{aligned}$$

så entydighet hos koefficienterna innebär att

$$\begin{aligned}(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (k^2+3k+2)c_{k+2} + (k^2+3k+2)c_k = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots \\ &\Leftrightarrow \quad c_{k+2} = -c_k, \quad k = 0,1,2,\ldots\end{aligned}$$

Bivillkoren $y(0) = A$ och $y'(0) = B$ ger $c_0 = A$ och $c_1 = B$, och formeln för koefficienterna ovan ger därför att

$$c_0 = A,\ c_2 = -A,\ c_4 = A,\ c_6 = -A,\ \ldots \qquad \text{och} \qquad c_1 = B,\ c_3 = -B,\ c_5 = B,\ c_7 = -B,\ \ldots$$

så

$$\begin{aligned}y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m}}_{\text{Jämna index}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1}}_{\text{Udda index}} = A\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} + B\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m+1} \\ &= (A+Bx)\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} = (A+Bx)\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{A+Bx}{1+x^2}, \qquad |x| < 1,\end{aligned}$$

d.v.s. $R = 1$, eftersom $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m}$ är en geometrisk serie med kvot $q = -x^2$.

<u>Svar</u>: $y = A\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} + B\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m+1} = \dfrac{A+Bx}{1+x^2}$, $|x| < 1$.

(Anmärkning: Även om den lösning vi hittat med potensserieansats bara är definierad i intervallet $-1 < x < 1$ ser vi – i efterhand, genom direkt insättning i differentialekvationen – att funktionen $y = (Ax+B)/(1+x^2)$ för $x \in \mathbf{R}$ faktiskt är en lösning till differentialekvationen på hela $\mathbf{R}$, och att $y(0) = A$, $y'(0) = B$ för denna. Man kan också observera att $\big((1+x^2)y\big)'' = (1+x^2)y'' + 4xy' + 2y$.)

7. Att $f_0(x) = x$ medför trivialt att $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ och $c_0 = d_0 = 0$. Vidare, eftersom $f_0(0) = 0$ ser vi att $f_1(0) = \ln(1 + f_0(0)) = \ln 1 = 0$, och genom att upprepa inser vi att $f_n(0) = 0$ för $n \in \mathbf{N} = \{0,1,2,\ldots\}$; alltså är $a_n = 0$ för $n \in \mathbf{N}$, d.v.s.

$$f_n(x) = b_n x + c_n x^2 + d_n x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Sätt $t = f_n(x)$. Då får vi $t^2 = b_n^2 x^2 + 2b_n c_n x^3 + \mathcal{O}(x^4)$, $t^3 = b_n^3 x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ och $\mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^4)$, varför

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) = \ln\big(1 + f_n(x)\big) &= \ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 + \mathcal{O}(t^4) \\ &= b_n x + (c_n - b_n^2/2)x^2 + (d_n - b_n c_n + b_n^3/3)x^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= b_{n+1}x + c_{n+1}x^2 + d_{n+1}x^3 + \mathcal{O}(x^4),\end{aligned}$$

d.v.s., tack vare entydighet hos Maclaurinkoefficienterna,

$$b_{n+1} = b_n, \quad c_{n+1} = c_n - b_n^2/2, \quad d_{n+1} = d_n - b_n c_n + b_n^3/3, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Eftersom $b_0 = 1$ ser vi att $b_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$. Vidare, att $c_0 = 0$ och $c_{n+1} = c_n - 1/2$ ger $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1/2) = -n/2$, $n \in \mathbf{N}$ (även för $n = 0$). Slutligen, $d_0 = 0$ och $d_{n+1} = d_n + n/2 + 1/3$ ger $d_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k/2 + 1/3) = [\text{aritmetisk summa}] = \big(1/3 + (n-1)/2 + 1/3\big) \cdot n/2 = (3n+1)n/12$, $n \in \mathbf{N}$ (även för $n = 0$).

<u>Svar</u>: $f_n(x) = x - \dfrac{n}{2}x^2 + \dfrac{(3n+1)n}{12}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.