Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2017-03-13 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$(2+\cos x)y' - (\sin x)y = 4\,\mathrm{e}^{2x}$$
som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 4$.

2. Betrakta kurvan $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$.
   (a) Beräkna längden av kurvan. (1p)
   (b) Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår när kurvan roterar ett varv kring linjen $x = 2$. (2p)

   För full poäng på del (b) krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

3. Avgör konvergens: (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\frac{1}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\tan\frac{1}{k}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 4 - 13x + 40\cos x.$$

5. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen $f(t) = \cos t$ med restterm i Lagranges form. (1p)
   (b) Visa att $\displaystyle\left|\int_0^{1/2}\cos(x^2)\,dx - \frac{159}{320}\right| \le \frac{1}{2^{12}\cdot 3^3}$. (2p)

   (Även en något sämre uppskattning kan ge en poäng.)

6. Hitta lösningen till $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$ som uppfyller bivillkoren $y(0) = A$, $y'(0) = B$. För full poäng ska svaret ges dels i form av en potensserie, dels som en ändlig kombination av elementära funktioner.

7. Låt $f_0(x) = x$ och $f_{n+1}(x) = \ln\bigl(1+f_n(x)\bigr)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 3 till f_n, d.v.s. bestäm koefficenterna a_n, b_n, c_n, d_n i utvecklingen $f_n(x) = a_n + b_nx + c_nx^2 + d_nx^3 + \mathcal{O}(x^4)$.