Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2016–10–18, 14–19

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Betrakta ekvationen
$$y'' + ay' + by = g(x)$$
där a, b är reella konstanter och g en kontinuerlig funktion. Bestäm a, b och $g(x)$ om man vet att $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x + \sin x$, C_1, C_2 godtyckliga konstanter, är den allmänna lösningen till ekvationen.
Ange därefter den lösning $y(x)$ sådan att $y(0) = y'(0) = 0$.

2. Det begränsade området mellan kurvan $y = 3x - x^2$ och linjen $y = x - 3$ roteras ett varv kring linjen $x = -2$. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.

3. Avgör om integralen
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x + x^3}} dx$$
är konvergent eller inte.

4. (a) (1 p) Bestäm taylorutvecklingen av ordning 2 med restterm i ordoform av $\sqrt{x}$ kring x=3.

   (b) (1 p) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+2x))^2 - 4x^2}{x - \sin x}$.

   (c) (1 p) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3 + \ln(3x-2) - 3x}{\sin^2(x-1)}$.

5. Betrakta den ordinära differentialekvationen
$$(x^2 - 1)yy' = y^2 - 1, \quad -1 < x < 1.$$

   (a) (1 p) Bestäm alla lösningar y som är konstanta för $x \in]-1, 1[$.

   (b) (2 p) Bestäm den lösning y som uppfyller $y(0) = -2$.

VÄND!

(1 p) 6. (a) För $k \geq 1$ definiera

$$a_k = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{k} & \text{om } k \text{ är udda} \\ \sin\dfrac{1}{k^2} & \text{om } k \text{ är jämnt} \end{cases}.$$

Är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent eller divergent?

(2 p) (b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

konvergent?

7. Finns det en funktion f med följande egenskaper:

- f är kontinuerlig på $[0,\infty[$ och $f(x) \geq 0$,
- för varje heltal $n \geq 0$ är $f(x)$ obegränsad på $[n,\infty[$,
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ är konvergent.

Motivera att en sådan funktion inte kan finnas ***eller*** konstruera en funktion med ovanstående egenskaper.

Lösningsförslag till TATA42, Envariabelanalys, del2, 2016–10–18

1. Då $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \sin x$ är den allmänna lösningen följer det att

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^x,$$

d v s den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har lösningarna 1 och 3. Faktorsatsen ger då

$$r^2 + ar + b = (r-1)(r-3) = r^2 - 4r + 3,$$

d v s $a = -4$, $b = 3$. Vidare följer det att $y_p = \sin x$. Insättning ger

$$y_p'' - 4y_p' + 3y_p = -\sin x - 4\cos x + 3\sin x = 2\sin x - 4\cos x = g(x).$$

Slutligen

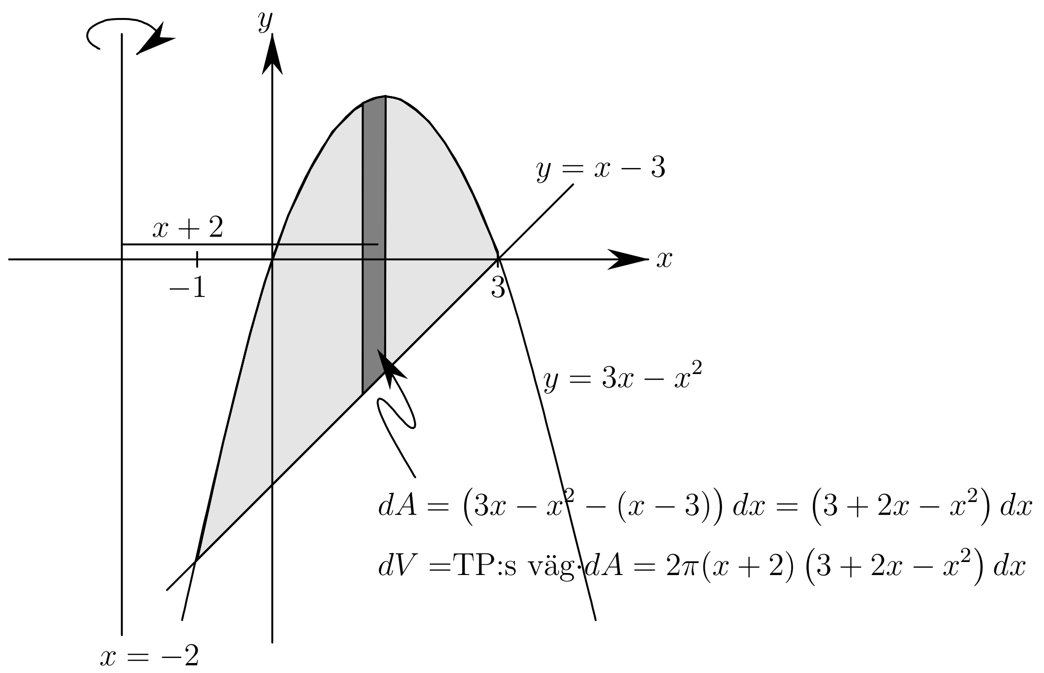
$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad y'(x) = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \cos x \Longrightarrow y'(0) = 3C_1 + C_2 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 + C_2 = -1 \end{cases} \overset{\text{ekv2-3ekv1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_2 = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1/2 \\ C_2 = 1/2 \end{cases} \text{ så att}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{3x}\right) + \sin x.$$

Svar: $a = -4$, $b = 3$, $g(x) = 2\sin x - 4\cos x$, $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{3x}\right) + \sin x$

2. Vi börjar med att rita en figur.



Skärningspunkterna mellan parabeln och linjen fås ur

$$3x - x^2 = x - 3 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = -1, 3.$$

Figuren ovan och Pappos-Guldins regel ger sedan

$$
\begin{aligned}
dV &= \text{TP:s väg} \cdot dA = 2\pi(x+2)\left(3+2x-x^2\right)dx = 2\pi\left(6+7x-x^3\right)dx \\
V &= 2\pi\int_{-1}^{3}\left(6+7x-x^3\right)dx = 2\pi\left[6x+\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{3} = \\
&= 2\pi\left(18+\frac{63}{2}-\frac{81}{4}-\left(-6+\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)\right) = 2\pi\left(24+\frac{56}{2}-\frac{80}{4}\right) = \\
&= 2\pi\left(52-20\right) = 64\pi
\end{aligned}
$$

Svar: $V = 64\pi$

3. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞. Vi delar därför upp ursprungsintegralen och studerar integralerna

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$$

var för sig.
För $0 < x \leq 1$ gäller

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

d v s integranden är jämförbar med $1/\sqrt{x}$. Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ är konvergent enligt Sats 10.12 (b), sid 456 i boken ($\alpha = 1/2 < 1$) följer det ur Sats 10.11 (Jämförelsesats I för generaliserade integraler, sid 456) att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$ är konvergent.
För $x > 1$ gäller

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to 1$$

då $x \to \infty$. Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx$ är konvergent enligt Sats 10.12 (a), sid 456 i boken ($\alpha = 3/2 > 1$) följer det ur Sats 10.13 (Jämförelsesats II för generaliserade integraler, sid 458) att $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$ är konvergent.
Då båda delintegralerna är konvergenta är den ursprungliga integralen konvergent.
Anmärkning: Man kan naturligtvis använda vilken som av jämförelesesatserna i båda fallen. I detta fall fungerar båda lika bra.
Svar: Integralen är konvergent.

4. (a) Vi börjar med att sätta $x = 3 + t$. Då x är nära 3 blir följaktligen t nära 0 och vi kan använda maclaurinutveckling.

$$\sqrt{x} = \Big[x = 3 + t\Big] = \sqrt{3+t} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{t}{3}\right)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{3} + \binom{1/2}{2}\left(\frac{t}{3}\right)^2 + \mathcal{O}(t^3)\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{t}{6} - \frac{1}{8}\cdot\frac{t^2}{9} + \mathcal{O}(t^3)\right) =$$
$$= \sqrt{3}\left(1 + \frac{t}{6} - \frac{t^2}{72} + \mathcal{O}(t^3)\right) = \Big[t = x - 3\Big] =$$
$$= \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2 + \mathcal{O}((x-3)^3)\right)$$

Svar: $\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2 + \mathcal{O}((x-3)^3)\right)$

(b) Maclaurinutveckling av täljare respektive nämnare ger

$$(\ln(1+2x))^2 = \left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)^2 = \left(2x - 2x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)^2 =$$
$$= 4x^2 - 8x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right)$$
$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right) = \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$
$$\frac{(\ln(1+2x))^2 - 4x^2}{x - \sin x} = \frac{4x^2 - 8x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) - 4x^2}{\frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^5\right)} = \frac{-8 + \mathcal{O}(x)}{\frac{1}{6} + \mathcal{O}\left(x^2\right)} \to -48$$

då $x \to 0$.
Svar: -48

(c) Byt variabel, $x = 1 + t$ så att $x \to 1 \iff t \to 0$. Då fås

$$\frac{3 + \ln(3x-2) - 3x}{\sin^2(x-1)} = \frac{3 + \ln(3(1+t)-2) - 3(1+t)}{\sin^2 t} = \frac{\ln(1+3t) - 3t}{\sin^2 t} =$$
$$= \frac{3t - \frac{1}{2}(3t)^2 + \mathcal{O}(t^3) - 3t}{\sin^2 t} = \frac{-\frac{9}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3)}{t^2}\frac{t^2}{\sin^2 t} =$$
$$= \left(-\frac{9}{2} + \mathcal{O}(t)\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{-2} \to -\frac{9}{2}$$

då $t \to 0$ eftersom $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ (standard).

Svar: $-\dfrac{9}{2}$.

5. (a) Om $y(x) = K$ för alla $x \in]-1, 1[$ så är $y'(x) = 0$ för alla $x \in]-1, 1[$. Insatt i ekvationen ger detta att

$$(x^2 - 1)K \cdot 0 = 0 = K^2 - 1 \iff K^2 = 1 \iff K = \pm 1.$$

Svar: (a) De lösningar som är konstanta på $]-1, 1[$ är $y = \pm 1$.

(b) För $x \in]-1, 1[$ och $y \neq \pm 1$ gäller

$$(x^2 - 1)yy' = y^2 - 1 \iff \frac{yy'}{y^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \iff$$

$$\iff \int \frac{y}{y^2 - 1} dy = \frac{1}{2} \ln \left| y^2 - 1 \right| =$$

$$= \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |x - 1| - \ln |x + 1| + C) = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \right) \iff$$

$$\iff \ln \left| y^2 - 1 \right| = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| e^C \right) \iff$$

$$\left| y^2 - 1 \right| = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| e^C \iff y^2 - 1 = K \frac{x-1}{x+1}, \quad K \neq 0 \iff$$

$$\iff y = \pm \sqrt{1 + K \frac{x-1}{x+1}}, \quad K \neq 0.$$

Villkoret $K \neq 0$ beror på att $K = e^C$. I detta fall leder $K = 0$ till att y blir någon av konstantlösningarna från (a) ovan. Eftersom $y(0) = -2 < 0$ följer det att

$$y = -\sqrt{1 + K \frac{x-1}{x+1}},$$

$$y(0) = -2 = -\sqrt{1 + K \frac{0-1}{0+1}} = -\sqrt{1 - K} \implies 4 = 1 - K \iff K = -3 \implies$$

$$\implies y = -\sqrt{1 - 3 \frac{x-1}{x+1}} = -\sqrt{1 - 3 \frac{(x+1) - 2}{x+1}} = -\sqrt{\frac{6}{x+1} - 2}$$

Svar: (b) $y = -\sqrt{\dfrac{6}{x+1} - 2}$

6. (a) Studera delsumman

$$S_{2N} = \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k a_k = \begin{bmatrix} \text{dela upp, udda } k \text{ för} \\ \text{sig, jämna för sig} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} a_{2k} - \sum_{k=1}^{N} a_{2k-1} = J_N - U_N$$

och studera J_N och U_N var för sig.
Vi börjar med J_N. Jämförelse på kvotform med $1/k^2$ ger

$$\frac{a_{2k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{\sin \frac{1}{(2k)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{1}{4k^2}}{\frac{1}{4k^2}} \to \frac{1}{4}$$

då $k \to \infty$. Då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent enligt Sats 10.5, sid 442 i boken, följer det att även

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{(2k)^2}$$

är konvergent enligt Sats 10.7 (Jämförelsesats II för positiva serier, sid 446). Då J_N är en delsumma till ovanstående serie följer det att J_N har ett ändligt gränsvärde då $N \to \infty$.
På samma sätt ser vi att U_N är jämförbar med $1/k$. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent enligt Sats 10.5, sid 442 i boken följer det att även

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2k+1}$$

är divergent enligt Sats 10.7 (Jämförelsesats II för positiva serier, sid 446). Då U_N är en delsumma till ovanstående serie följer det, eftersom termerna i U_N är positiva, att $U_N \to \infty$ då $N \to \infty$. Följaktligen gäller

$$S_{2N} = J_N - U_N \to -\infty, \quad \text{då} \quad N \to \infty$$

och därmed är serien divergent.
Svar: Divergent.
Anmärkning: Observera att serien uppfyller två av tre krav i Leibniz kriterium, den är alternerande och termerna går mot noll. Leibniz kriterium är dock inte tillämpbart eftersom termernas belopp inte avtar!

(b) Vi använder kvotkriteriet.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}}{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n}\right| = |x|\,\frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} =$$

$$= |x|\left(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right) \to |x| \quad \text{då } n\to\infty$$

eftersom $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ och $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n} \to \infty$. Kvotkriteriet ger då att potensserien är (absolut)konvergent om $|x|<1$ och divergent om $|x|>1$.
$x=\pm 1$ ger serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(\pm 1)^n.$$

Återigen, eftersom $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n} \to \infty$ går termerna inte mot noll. Därmed är serierna för $x=\pm 1$ divergenta enligt divergenstestet (Sats 10.1, sid 436).

Svar: Konvergent endast för $-1<x<1$.

7. Det finns en funktion som har de efterfrågade egenskaperna! Observera att detta är en avgörande skillnad mellan serier (vars termer går mot noll om serien är konvergent) och generaliserade integraler.
Det finns många sätt att konstruera en sån här funktion. Ett sätt är följande: Låt T_k vara en triangel med bas $2{\cdot}4^{-k}$ och höjd 2^k, d v s basen minskar mot 0 och höjden ökar mot ∞ då $k\to\infty$ och

$$\text{arean av } T_k = A_k = \frac{1}{2}\text{bas}{\cdot}\text{höjd} = \frac{1}{2}\left(2{\cdot}4^{-k}\right)2^k = \left(2^2\right)^{-k}{\cdot}2^k = 2^{-2k}{\cdot}2^k = 2^{-k} \to 0$$

då $k\to\infty$.
Vi avstår från att ge en formel för hur den sökta funktionen skall se ut, utan nöjer oss med att beskriva dess graf.

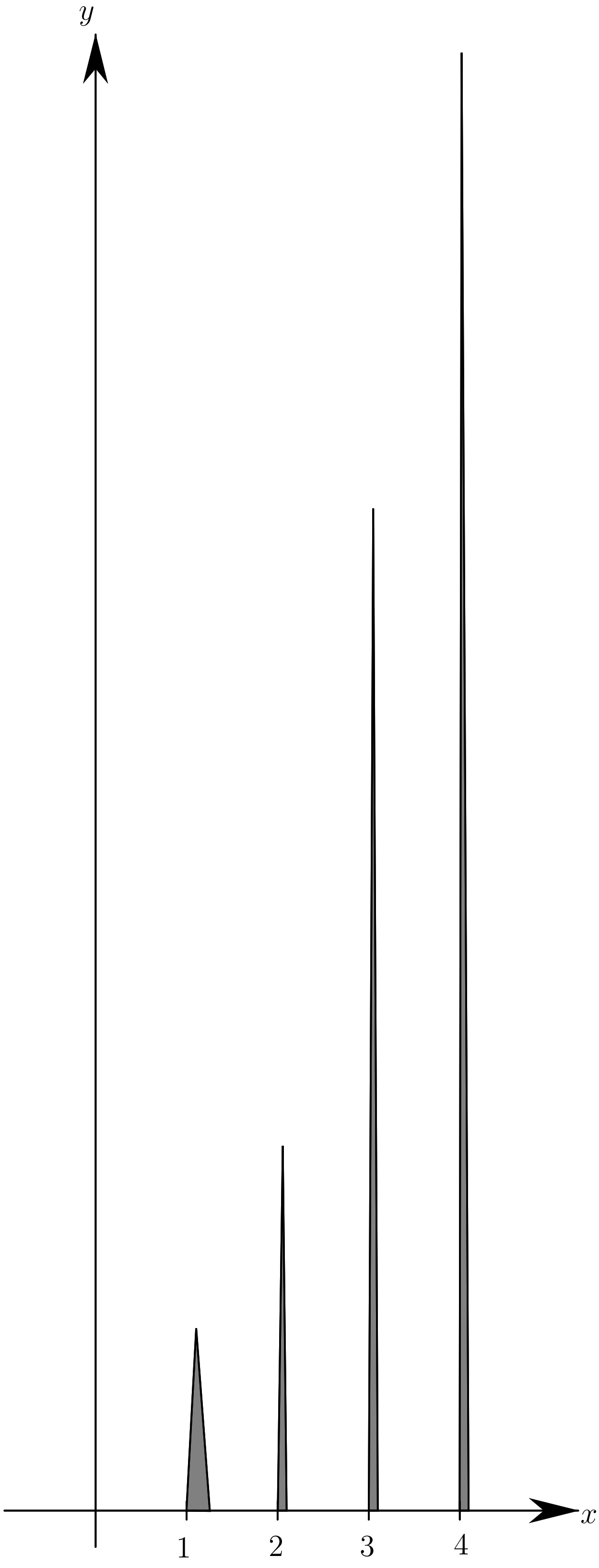
$$\begin{array}{lllll}
\text{För} & 1\le x<1+\frac{1}{4} & \text{ges grafen av} \quad T_1, & 1+\frac{1}{4}\le x<2 & \text{är} \quad f=0,\\
\text{för} & 2\le x<2+\frac{1}{4^2} & \text{ges grafen av} \quad T_2, & 2+\frac{1}{4^2}\le x<2 & \text{är} \quad f=0,\\
\text{för} & 3\le x<3+\frac{1}{4^3} & \text{ges grafen av} \quad T_3, & 3+\frac{1}{4^3}\le x<3 & \text{är} \quad f=0,\\
\text{för} & 4\le x<4+\frac{1}{4^4} & \text{ges grafen av} \quad T_4, & 4+\frac{1}{4^4}\le x<4 & \text{är} \quad f=0
\end{array}$$

och så vidare.
Grafen till f består alltså av x-axeln för det mesta, d v s $f=0$, men till höger om

$x = k$ ligger triangeln T_k som blir högre och smalare ju större k blir. Följaktligen uppfyller f de två första kraven i uppgiften.
Återstår att beräkna integralen. Då värdet av denna är den samlade arean under grafen följer det att

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{arean av } T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

då summan är en konvergent geometrisk serie med kvot $= \frac{1}{2}$.
Svar: Följaktligen finns det funktioner med de specifcerade egenskaperna. Se figur på nästa sida.


y
x
1
2
3
4