Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2016-08-25 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $4y^3y' = 1 + y^4$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (Lösningens definitionsmängd måste anges för full poäng.)

2. Beräkna arean av det område i planet som i polära koordinater ges av
$$0 \le \varphi \le \pi/2, \quad 0 \le r \le \varphi e^{\varphi^3}.$$

3. Bestäm konstanterna a och b så att följande gränsvärde existerar ändligt:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{1+x^2}} - a - bx^2}{x^4}.$$
Bestäm även gränsvärdet för dessa värden på a och b.

4. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - y' - 12y = xe^{4x}$.

5. (a) Avgör om $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x^5}\right) dx$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör för vilka x som $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n n^{1/2}} x^n$ är konvergent. (2p)

6. Bestäm alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner $y(x)$ som löser
$$x^2 y'(x) - 2\int_0^x y(t)\,dt = 4x^3, \quad x > 0.$$

7. Visa att om $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är absolutkonvergent samt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ är bijektiv (d.v.s. för varje j finns exakt ett i så att $f(i) = j$) så gäller att
$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty a_{f(k)}.$$

Lycka till!

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2016-08-25

1. Eftersom $1 + y^4 > 0$ för alla y gäller

$$4y^3y' = 1 + y^4 \Leftrightarrow \frac{4y^3}{1+y^4}y' = 1.$$

Alltså gäller

$$\int \frac{4y^3}{1+y^4}dy = \int dx,$$

d.v.s.

$$\ln(1 + y^4) = x + c.$$

$y(0) = 1$ ger $\ln 2 = c$, så

$$1 + y^4 = 2e^x, \quad y = \sqrt[4]{2e^x - 1}.$$

Detta gäller då $x > -\ln 2$.

Svar: $y = \sqrt[4]{2e^x - 1}$, $(x > -\ln 2)$.

2. Formeln för area i polära koordinater ger

$$\int_0^{\pi/2} \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\varphi e^{\varphi^3}\right)^2 d\varphi =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\varphi^2 e^{2\varphi^3} d\varphi = \left[\frac{1}{12}e^{2\varphi^3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi^3/4} - 1}{12}.$$

Svar: $\frac{e^{\pi^3/4}-1}{12}$.

3. Eftersom

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3),$$
$$e^{\sqrt{1+x^2}} = e^{(1+x^2/2-x^4/8+\mathcal{O}(x^6))} = e \cdot e^{(x^2/2-x^4/8+\mathcal{O}(x^6))}$$
$$\left\{t = x^2/2 - x^4/8 + \mathcal{O}(x^6)\right\} = \ldots = e(1 + x^2/2 + \mathcal{O}(x^6)),$$

så ser vi att vi måste ha $a = e$ och $b = e/2$ om gränsvärdet ska existera. För dessa värden får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1+x^2}} - e - ex^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{O}(x^6)}{x^4} = 0.$$

Svar: 0.

4. *Homogen ekvation:* $r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$. Därför gäller att den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}.$$

Partikulärlösning: Vi gör ansatsen $y_p = ze^{4x}$, vilket ger:

$$(D^2-D-12)ze^{4x} = (D+3)(D-4)ze^{4x} = \{\text{förskjutningsregeln}\} = e^{4x}(D+7)Dz = e^{4x}(z''+7z') = xe^{4x}.$$

D.v.s. vi vill hitta en funktion z s.a. $z'' + 7z' = x$. För detta ansätts $z = ax^2 + bx$, vilket insatt i ekvationen ger $2a + 7(2ax + b) = x$. Denna har lösningen $a = 1/14, b = -1/49$.

Svar: $y = y_h + y_p = C_1e^{-3x} + (C_2 + x^2/14 - x/49)e^{4x}$.

5.

(a) Integralen är generaliserad endast i oändligheten. Eftersom $\ln(1+1/x^5) = 1/x^5 + \mathcal{O}((1/x^5)^2)$ då $x \to \infty$ samt att vi vet att den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx$ är konvergent och

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+1/x^5)}{1/x^5} = 1 < \infty,$$

så följer från jämförelseprincipen på gränsvärdesform att integralen är konvergent.

(b) Vi tillämpar kvotkriteriet för att få fram konvergensradien:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}/(2^{n+1}(n+1)^{1/2})}{|x|^n/(2^n n^{1/2})} = \frac{|x|}{2} \cdot \frac{n^{1/2}}{(n+1)^{1/2}} \to \frac{|x|}{2} \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså är konvergensradien 2. För $x = 2$ får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n n^{1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}.$$

Denna serie är alternerande samt har termer vars absolutbelopp avtar mot noll då n går mot oändligheten, och därför är den konvergent enligt Leibniz.

För $x = -2$ får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n^{1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

som är divergent.

Svar: a: Konvergent. b: Konvergent då $-2 < x \leq 2$.

6.

$$\left(x^2y' - 2\int_0^x y\,dt\right)' = (4x^3)'$$

ger

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 12x^2,$$

(observera att $x = 0$ insatt i ekvationen bara ger $0 = 0$).

Substitutionen $x = \mathrm{e}^t$ ger nu med $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$

$$z' = \mathrm{e}^t y' = xy', \quad z'' = \mathrm{e}^{2t}y'' + \mathrm{e}^t y' = x^2y'' + xy'.$$

Detta ger ekvationen

$$x^2y'' + xy' + xy' - 2y = z'' + z' - 2z = 12\mathrm{e}^t.$$

Detta är en andra ordningens linjär diffekvation med konstanta koefficienter. Eftersom $r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$ har denna homogenlösning

$$z_h = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-2t}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $z_p = A\mathrm{e}^{2t}$ (A konstant) och får ekvationen

$$(D-1)(D+2)(A\mathrm{e}^{2t}) = \mathrm{e}^{2t}(D+1)(D+4)A = \mathrm{e}^{2t}4A = 12e^{2t}.$$

D.v.s. $A = 3$. Detta ger

$$y = C_1x + C_2x^{-2} + 3x^2.$$

Svar: $y = C_1x + C_2x^{-2} + 3x^2$.

7. Låt $S = \sum_{k=1}^\infty a_k$. Givet $\varepsilon > 0$ finns det N sådant att

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon/2, \text{ och därför även } \left|\sum_{k=1}^{N} a_k - S\right| \leq \varepsilon/2.$$

Eftersom f är bijektiv kan vi välja M så stort att $f(k) > N$ för varje $k > M$, då gäller även att för varje $l \leq N$ finns $k \leq M$ sådant att $f(k) = l$. Om nu $n \geq M$ får vi om vi låter $A = \{k : 1 \leq k \leq n, f(k) > N\}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} - S\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k\in A} a_{f(k)} - S\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{N} a_k - S\right| + \left|\sum_{k\in A} a_{f(k)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{N} a_k - S\right| + \sum_{k\in A} |a_{f(k)}| \leq \left|\sum_{k=1}^{N} a_k - S\right| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ var godtyckligt betyder detta per definition att $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ är konvergent med summa S vilket skulle visas.