LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1
Datum: 2016-05-31
Institution: MAI

Tentamen i Envariabelanalys 2

TATA42/TEN1 2016-05-31 8–13

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm volymen som uppstår då det begränsade området mellan $y = 4x - x^2 + 1$ och $y = 1$ roterar ett varv kring $x = -2$.

2. För vilka $x \in \mathbf{R}$ konvergerar $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{3k}}{8^k \ln k}$?

3. (a) Finn Taylorutvecklingen av ordning 2 för $\ln x$ kring $x = e$ (restterm på ordo-form). (1p)
   (b) Hitta Maclaurinutvecklingen av ordning 2 för $e^{\sqrt{1+2x}}$ (med resttermen $O(x^3)$). (1p)
   (c) Vad blir $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\big(\arctan(x) - x\big)\big(\cos(x) - 1\big) - x^5}{x^7}$? (1p)

4. Hitta alla lösningar $y(x)$ till $y''' + 4y'' + 4y' = 12\,e^{-2x}$ så att $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ samt $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$.

5. Konvergerar integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$? Motivera noggrant.

6. Visa att $y = \sqrt{x}$ löser ekvationen

$$4(x^3 - x^2)y'' - 4xy' + (1+x)y = 0, \quad x > 1,$$

   och hitta sedan alla lösningar till denna ekvation genom att göra ansatsen $y(x) = z(x)\sqrt{x}$.

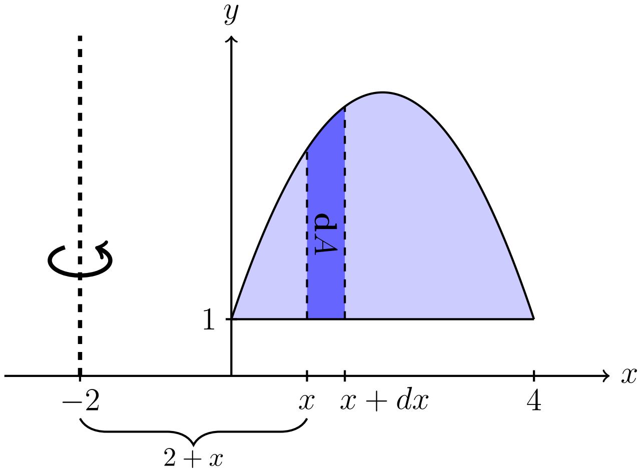
7. Låt $a_k \geq 0$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och antag att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ är divergent.

Lösningsskisser

1. Kurvan $y = 4x - x^2 + 1$ skär $y = 1$ precis då

$$4x - x^2 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = 4.$$

Det begränsade området ges därför av $1 \le y \le 4x - x^2 + 1$ och $0 \le x \le 4$. Rekomendationen brukar vara att rita en figur, så vi gör detta.



För ett litet area-element dA vid x med tjocklek dx så ligger tyngdpunkten approximativt $2 + x$ från rotationsaxeln vågrätt. Tyngdpunktens väg för dA blir således $2\pi(2 + x)$. Vidare ges dA av en rektangel med höjden $4x - x^2 + 1 - 1$ och bredden dx, så $dA = (4x - x^2)dx$. Enligt Pappos-Guldins formel ges nu det lilla volymselementet dV av

$$dV = 2\pi(2 + x)dA = 2\pi(2 + x)(4x - x^2)dx = 2\pi(8x + 2x^2 - x^3)dx$$

och därmed erhåller vi den eftersökta volymen genom att summera dessa volymselement:

$$V = \int_0^4 dV = 2\pi \int_0^4 (8x + 2x^2 - x^3)dx = 2\pi \left[4x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{256\pi}{3}.$$

Självklart kan integralen även ställas upp direkt med hjälp av ”cylinderformeln.”

Svar: $\dfrac{256\pi}{3}$.

2. Vi börjar med att bestämma konvergensradien R för serien. Eftersom

$$\left|\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}\right|^{1/k} = \left(\frac{|x|}{2}\right)^3 e^{-\frac{1}{k}\ln\ln k} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k \to \infty.$$

så är serien absolutkonvergent enligt rotkriteriet då

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $x > 2$ eller $x < -2$. Kvar att undersöka är punkterna $x = \pm 2$. Om $x = 2$ ges serien av

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$$

som är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent. Om $x = -2$ kan serien uttryckas

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

Eftersom termernas belopp i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\ln(k+1) < 1/\ln k$ och $1/\ln k \to 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Svar: $-2 \leq x < 2$.

3. (a) Vi inför variabeln $t = x - e$. Då är $t \approx 0$ då $x \approx e$ och

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln(e+t) = \ln(e(1+t/e)) = 1 + \ln(1+t/e) \\ &= 1 + \frac{t}{e} - \frac{t^2}{2e^2} + O(t^3) \\ &= 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + O((x-e)^3).\end{aligned}$$

(b) Vi utvecklar kvadratroten i exponenten först och "bryter ut" e^1 så vi får en ny exponent som är liten när x är liten. Sen utvecklar vi e^t och erhåller

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{1+2x}} &= e^{1+\frac{1}{2}2x-\frac{1}{8}(2x)^2+O(x^3)} = ee^{x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)} \\ &= e\cdot\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)^2 + O\left(\left(x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)^3\right)\right) \\ &= e\cdot\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) = e\cdot\big(1 + x + O(x^3)\big).\end{aligned}$$

(c) Vi ser på nämnaren hur långt vi behöver utveckla och skriver därför

$$\begin{aligned}6\big(\arctan(x) - x\big)\big(\cos(x) - 1\big) &= 6\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) - x\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) - 1\right) \\ &= 6\left(\frac{x^5}{6} - \frac{x^7}{3\cdot 4!} - \frac{x^7}{10} + O(x^9)\right) \\ &= x^5 - \frac{41}{60}x^7 + O(x^9).\end{aligned}$$

Sålunda blir

$$\frac{6\big(\arctan(x) - x\big)\big(\cos(x) - 1\big) - x^5}{x^7} = -\frac{41}{60} + O(x^2) \to -\frac{41}{60}, \text{ då } x \to 0.$$

Svar: (a) $1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + O((x-e)^3)$. (b) $e + ex + O(x^3)$. (c) $-\frac{41}{60}$.

4. Det karakteristiska polynomet ges av

$$p(r) = r^3 + 4r^2 + 4r = r(r^2 + 4r + 4) = r(r+2)^2.$$

Rötterna är alltså $r = 0$ och $r = -2$. Enligt sats ges nu samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h(x) = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{-2x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning $y_p(x)$. Lämplig ansats är till exempel $y_p(x) = z(x)e^{-2x}$. Förskjutningsregeln visar nu att

$$\begin{aligned} p(D)y_p &= p(D)(ze^{-2x}) = e^{-2x}p(D-2)z = e^{-2x}(D-2)(D-2+2)^2 z \\ &= e^{-2x}(D-2)z'' = e^{-2x}(z''' - 2z''). \end{aligned}$$

Detta uttryck insatt i ekvationen medför att

$$p(D)y_p = 12e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad z''' - 2z'' = 12.$$

En lösning $z(x)$ till denna ekvation finner vi genom ansatsen $z(x) = Ax^2$, ty

$$0 - 4A = 12 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3,$$

så $z = -3x^2$ och $y_p = -3x^2e^{-2x}$. Den allmänna lösning till ekvationen ges därmed enligt superpositionsprincipen av

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3x - 3x^2)e^{-2x}.$$

Alltså blir

$$y'(x) = e^{-2x}\big(-2C_2 - 2C_3x + 6x^2 + C_3 - 6x\big)$$

och därmed finner vi att

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1 \quad \text{och} \quad y'(0) = -2C_2 + C_3 = 0.$$

Vidare är $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = C_1 = 2$, så $C_2 = 1 - C_1 = -1$ och $C_3 = 2C_2 = -2$. De eftersöka lösningarna ges därmed av

$$y(x) = 2 - \big(1 + 2x + 3x^2\big)e^{-2x}.$$

Svar: $y(x) = 2 - \big(1 + 2x + 3x^2\big)e^{-2x}$.

5. Eftersom integralen är generaliserad både i 0 och ∞ så delar vi upp i två delar:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx.$$

Vi börjar med att undersöka integralen på $[0,1]$. För $x \in]0,1]$ gäller att

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}.$$

Nu vet vi att $x^{-1}\arctan x \to 1$ och $x^{-1}\ln(1+x) \to 1$ då $x \to 0$, så

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}} = 1.$$

Låt därför $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ och $f(x) = g(x)\dfrac{\arctan x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då är $f, g \ge 0$ för $x > 0$ och både f och g är kontinuerliga för $x > 0$. Vidare visade vi ovan att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \in]0, \infty[\text{ då } x \to 0^+,$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer det att

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$$

kommer vara absolutkonvergent eftersom vi vet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$.

Vi undersöker nu integralen på $[1,\infty[$. Vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\ln(1+x)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \end{aligned}$$

så vi låter $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då gäller att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \to \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \to \infty.$$

Eftersom f och g är kontinuerliga och icke-negativa på $]1,\infty[$ samt att gränsvärdet då $x \to \infty$ för f/g är $\frac{\pi}{2} \in]0,\infty[$ så följer det från jämförelsesatsen på gränsvärdesform att $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent om och endast om $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ är konvergent. Vi undersöker denna integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx \le \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

eftersom $\ln(1+x) \ge \ln 2$ för $x \ge 1$. Den sista integralen är känd som konvergent ($\alpha = 3/2 > 1$).

Svar: Konvergent.

6. Om $y = \sqrt{x}$ så är $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ och $y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. Således blir

$$\begin{aligned} 4(x^3 - x^2)y'' - 4xy' + (1+x)y &= -(x^3 - x^2)x^{-3/2} - 2x^{1/2} + (1+x)x^{1/2} \\ &= x^{1/2} - x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{1/2} + x^{3/2} = 0 \end{aligned}$$

och $y = \sqrt{x}$ är därför en lösning till ekvationen för $x > 0$.

Låt nu $y(x) = z(x)\sqrt{x}$ för $x > 0$. Då blir

$$y'(x) = z'(x)x^{1/2} + \frac{1}{2}z(x)x^{-1/2} \quad \text{och} \quad y''(x) = z''(x)x^{1/2} + z'(x)x^{-1/2} - \frac{1}{4}z(x)x^{-3/2}.$$

Vi sätter in detta i ekvationen och finner att

$$\begin{aligned} 4(x^3 - x^2)y'' - 4xy' + (1+x)y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4(x-1)x^{5/2}z'' + 4(x-2)x^{3/2}z' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z'' + \frac{x-2}{x^2-x}z' = 0. \end{aligned}$$

Vi löser denna ekvation med hjälp av en integrerande faktor. Eftersom

$$\int \frac{x-2}{x^2-x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx = 2\ln|x| - \ln|x-1| = \ln\frac{x^2}{|x-1|}$$

får vi en integrerande faktor i form av $\dfrac{x^2}{x-1}$ (eftersom $x > 1$ är det inget problem, men vi skulle ändå kunna skippa beloppet eftersom vi bara söker *en* primitiv funktion). Alltså ska vi lösa

$$\frac{d}{dx}\left(z'\frac{x^2}{x-1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z' = C\frac{x-1}{x^2} = C\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z = C\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + D.$$

Eftersom $y = z\sqrt{x}$ så har vi nu funnit våra lösningar:

$$y(x) = C\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x} + D\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Svar: $y(x) = C\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x} + D\sqrt{x}$, $x > 0$.

7. Vi betraktar två olika fall. Fall 1: när $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Eftersom $a_k \to 0$ så måste $a_k \leq 1$ om k är stort. Alltså gäller att

$$\frac{a_k}{1+a_k} \geq \frac{a_k}{2}.$$

Men om $\sum a_k$ är divergent så kommer även $\sum \dfrac{a_k}{2} = \dfrac{1}{2}\sum a_k$ att vara divergent. Således blir $\sum \dfrac{a_k}{1+a_k}$ divergent.

Fall 2: när $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$. Här skriver vi om bråket som

$$\frac{a_k}{1+a_k} = \frac{1+a_k}{1+a_k} - \frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{1}{1+a_k}.$$

Eftersom vi vet att $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$, så gäller att $\dfrac{1}{1+a_k} \not\to 1$. Därmed ser vi att $\dfrac{a_k}{1+a_k} \not\to 0$, så serien $\sum \dfrac{a_k}{1+a_k}$ är divergent enligt divergenstestet.

Svar: Se ovan.