Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2016-03-23 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - y = x^3$, $x > 0$, som uppfyller villkoret $y(2) = 1$.

2. Beräkna följande gränsvärden:
   (a) $\lim_{x\to 0} x^3/(x - \arctan x)$ (1p)
   (b) $\lim_{x\to 0} (\cos^2 x - 1 + x^2)/x^4$ (1p)
   (c) $\lim_{x\to 0} \big(2(1+x)^{1/x} - 2e + ex\big)/x^2$ (1p)

3. En parametriserad kurva ges av $x(t) = t^2 + 1$ och $y(t) = t^3 - 1$, där $1 \le t \le 2$. Bestäm kurvans längd.

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - 2y'' + y' - 2y = 4e^x - 8x$.

5. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k}$ är konvergent. (1p)
   (b) Avgör om $\displaystyle\int_0^{\infty} (x^{1/2} + x^{-1/2}) \cos x^2 \, dx$ är konvergent. (2p)

6. Låt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ och $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k$, där $c_k = (\cos k)/(4^k k^3)$. Visa att $|f(x) - f_n(x)| < 10^{-6}$ om $|x| \le 2$ och $n \ge 10$.

7. Antag att $a_k > 0$ för $k = 1, 2, \ldots$, och att $\lim_{k\to\infty} k(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}) = \alpha$, där $\alpha > 1$. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

Lycka till!

Svar m.m., TATA42, 2016-03-23

1. $xy' - y = x^3, \quad x > 0, \quad y(2) = 1.$

$y' - \frac{1}{x} y = x^2$. Integrerande faktor: $e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = x, \quad \left(\frac{1}{x} y\right)' = x, \quad \frac{1}{x} y = \frac{x^2}{2} + C.$

$y(2) = 1$ ger $\quad \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2^2}{2} + C$, dvs $C = -\frac{3}{2}$.

Svar: $y(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{2}, \quad x > 0.$

2. a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \arctan x} = 3$, ty:

$$\frac{x^3}{x - \arctan x} = \frac{x^3}{x - (x - \frac{x^3}{3} + O(x^5))} = \frac{1}{\frac{1}{3} + O(x^2)} \longrightarrow 3 \quad \text{då } x \to 0.$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4} = \frac{1}{3}$, ty:

$$\frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4} = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^2 - 1 + x^2}{x^4} =$$

$$= \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{4} + O(x^6) - 1 + x^2}{x^4} = \frac{1}{3} + O(x^2) \longrightarrow \frac{1}{3} \quad \text{då } x \to 0.$$

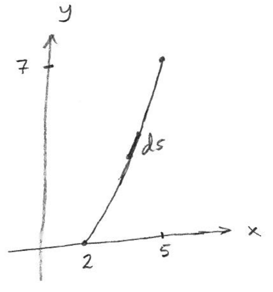
c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2(1+x)^{1/x} - 2e + ex}{x^2} = \frac{11e}{12}$, ty:

$$2(1+x)^{1/x} = 2e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = 2e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)} = 2e^1 e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)} =$$

$$= 2e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4} + O(x^3)\right) + O(O(x)^3)\right) =$$

$$= 2e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + O(x^3)\right) = 2e - ex + \frac{11ex^2}{12} + O(x^3).$$

3. $x(t) = t^2 + 1, \quad y(t) = t^3 - 1, \quad 1 \le t \le 2.$



$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt,$$

så $$L = \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{40^{3/2} - 13^{3/2}}{27}.$$

Svar: $\dfrac{40^{3/2} - 13^{3/2}}{27}.$

4. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 4e^x - 8x$.

Hom: Kar.ekv.: $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$, $(r-2)(r^2+1) = 0$, $r = 2, \pm i$,

så $y_h = Ae^{2x} + B\cos x + C\sin x$, där $A, B, C \in \mathbb{C}$ godtyckliga.

Part. lösn. y_{p1} för $HL = -8x$: Ansätt $y_{p1} = ax + b$. $y_{p1}' = a$,

$y_{p1}'' = y_{p1}''' = 0$, så $a - 2(ax+b) = -8x$, vilket ger $a = 4$, $b = 2$,

dvs $y_{p1} = 4x + 2$.

Part. lösn. y_{p2} för $HL = 4e^x$: Sätt $y = e^x z$.

$(D-2)(D^2+1)(e^x z) = 4e^x$, $e^x(D-1)((D+1)^2+1)z = 4e^x$,

$(D-1)(D^2+2D+2)z = 4$, $z''' + z'' - 2z = 4$, så $z_p = -2$, $y_{p2} = -2e^x$.

<u>Svar</u>: $y(x) = Ae^{2x} + B\cos x + C\sin x - 2e^x + 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

5. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k}$.

Serien är konvergent enl. Leibniz kriterium, eftersom:
- serien är alternerande,
- termernas belopp $\sin\frac{1}{k}$ avtar,

och
- termerna går mot 0.

b) $\displaystyle\int_0^\infty (x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2\,dx$. Generaliserad i 0 och ∞.

$\int_0^1$: $(x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2 \geq 0$ då $0 < x \leq 1$.

$(x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2 = x^{-1/2}(x+1)\cos x^2$, $(x+1)\cos x^2 \to 1 > 0$ då $x \to 0$,

och $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$ är konv., så $\int_0^1 (x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2\,dx$ är konv.

$\int_1^\infty$: $\displaystyle\int_1^b (x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2\,dx = \int_1^b (x^{-1/2} + x^{-3/2})\,x\cos x^2\,dx =$

$$= \left[(x^{-1/2} + x^{-3/2})\tfrac{1}{2}\sin x^2\right]_1^b - \int_1^b \left(-\tfrac{1}{2}x^{-3/2} - \tfrac{3}{2}x^{-5/2}\right)\tfrac{1}{2}\sin x^2\,dx$$

$$\to 0 - \sin 1 + \frac{1}{4}\int_0^\infty (x^{-3/2} + 3x^{-5/2})\sin x^2\,dx \quad \text{då } b \to \infty,$$

ty den sista integralen är absolutkonv.:

$$|(x^{-3/2} + 3x^{-5/2})\sin x^2| \leq x^{-3/2} + 3x^{-5/2} \leq 4x^{-3/2} \quad \text{då } x \geq 1,$$

och $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ är konv. Så: $\int_1^\infty (x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2\,dx$ är konv.

Alltså är $\displaystyle\int_0^\infty (x^{1/2} + x^{-1/2})\cos x^2\,dx$ konvergent.

6. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k$, $c_k = \dfrac{\cos k}{4^k k^3}$.

Om $|x| \leq 2$ och $n \geq 10$ har vi att $|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{\cos k}{4^k k^3} x^k \right| \leq$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\cos k|}{4^k k^3} |x|^k \leq \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \cdot 2^k \leq \frac{1}{11^3} \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{11^3} \cdot \frac{1/2^{11}}{1 - 1/2} = \frac{1}{11^3 \cdot 2^{10}} \leq \frac{1}{10^3 \cdot 1024} < 10^{-6},$$ vilket skulle visas.

7. $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim_{k \to \infty} k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \alpha$, där $\alpha > 1$.

Ta ett β s.a. $1 < \beta < \alpha$ och låt N vara så stort att $k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) \geq \beta$ då $k \geq N$. Om $k \geq N$ är $1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq \dfrac{\beta}{k}$, $a_{k+1} \leq \left(1 - \dfrac{\beta}{k}\right) a_k$, så

$$a_{N+n} \leq \left(1 - \frac{\beta}{N+n-1}\right) a_{N+n-1} \leq \ldots \leq \left(1 - \frac{\beta}{N+n-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\beta}{N}\right) a_N \quad \text{om } n \geq 1.$$

För $n \geq 1$ har vi $\ln a_{N+n} \leq \ln\left(1 - \dfrac{\beta}{N+n-1}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \dfrac{\beta}{N}\right) + \ln a_N \leq$

$$\leq -\frac{\beta}{N+n-1} - \ldots - \frac{\beta}{N} + \ln a_N = -\beta\left(\frac{1}{N+n-1} + \ldots + \frac{1}{N}\right) + \ln a_N \leq$$

$$\leq -\beta \int_N^{N+n} \frac{1}{x}\, dx + \ln a_N = -\beta \ln \frac{N+n}{N} + \ln a_N = \ln \frac{N^\beta a_N}{(N+n)^\beta},$$

dvs $a_{N+n} \leq \dfrac{N^\beta a_N}{(N+n)^\beta}$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(N+n)^\beta}$ är konvergent (standard, ty $\beta > 1$), är $\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n}$ konv., och därmed är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, vilket skulle visas.