Linköpings universitet
Matematiska institutionen

**Kurskod: TATA42**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i Envariabelanalys 2

**2015–10–20, 8–13**

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

(2 p) 1. (a) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 3 i $x = 2$ med restterm i ordoform till funktionen $f(x) = e^{2x}$.

(1 p) (b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos 2x}{x^2}$.

2. Bestäm $g(x)$ så att $y = x^3$ blir en lösning till ekvationen

$$y' + g(x)y = x^2, \quad x > 0.$$

Bestäm därefter den lösning till ekvationen för vilken gäller att $y(1) = 0$.

3. Låt $S$ vara den yta som uppkommer då kurvan $y = f(x)$, $-1 \le x \le 1$ roteras ett varv kring $x = 3$.

(1 p) (a) Inför lämpliga beteckningar och rita en tydlig figur som beskriver situationen. Alla kvantiteter som behövs för att skriva upp den i (b) efterfrågade integralen skall finnas med. (OBS! Du behöver inte rita rotationsytan.)

(1 p) (b) Skriv arean av $S$ med hjälp av en integral.

(1 p) (c) Beräkna arean av $S$ i fallet att $f(x) = 6x - x^2$.

4. Bestäm den lösning till ekvationen

$$y'' - y = x(e^x + 1)$$

för vilken gäller att $y(0) = y'(0) = 0$.

5. För vilka $\alpha > 0$ konvergerar $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^\alpha dx$?

**VÄND!**

6. För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n x^{2n-1}}?$$

Uttryck serien med hjälp av elementära funktioner.

7. Antag att funktionen $f$ går att derivera oändligt många gånger och att derivatorna av alla ordningar, $f^{(k)}(x) \geq 0$ för $0 \leq x \leq 1$. Visa att maclaurinserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

är konvergent för $-1 \leq x \leq 1$.

# Lösningsförslag TATA42 2015-10-20

1. (a) Låt $t = x - 2$. Då är $t \approx 0$ då $x \approx 2$ och

$$\begin{aligned} e^{2x} = e^{2t+4} = e^4 e^{2t} &= e^4 \left(1 + 2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{3!} + O(t^4)\right) \\ &= e^4 \left(1 + 2(x-2) + 2(x-2)^2 + \frac{4(x-2)^3}{3}\right) + O((x-2)^4) \end{aligned}$$

enligt standardutveckling för $e^t$. Alternativt kan man låta $f(x) = e^{2x}$ och räkna ut $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f^{(3)}(2)$ och direkt använda Taylors formel:

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f^{(2)}(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + O((x-2)^4).$$

(b) Standardutvecklingar i täljaren till och med ordning 2 (på grund av $x^2$-termen i nämnaren) visar att

$$\begin{aligned} \frac{e^x - \sin x - \cos 2x}{x^2} &= \frac{1 + x + x^2/2 - x - (1 - (2x)^2/2) + O(x^3)}{x^2} \\ &= \frac{5x^2/2 + O(x^3)}{x^2} = \frac{5}{2} + O(x) \to \frac{5}{2} \end{aligned}$$

då $x \to 0$.

**Svar**: (a) Se ovan. (b) $\frac{5}{2}$.

2. Om $y(x) = x^3$ ska vara en lösning måste

$$(x^3)' + g(x)x^3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)x^3 = -2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = -\frac{2}{x},$$

där vi utnyttjat att $x > 0$ vid divisionen. Vi ska alltså lösa

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2, \ x > 0.$$

En integrerande faktor ges av $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Vi multiplicerar ekvationen med denna och finner att, för $x > 0$,

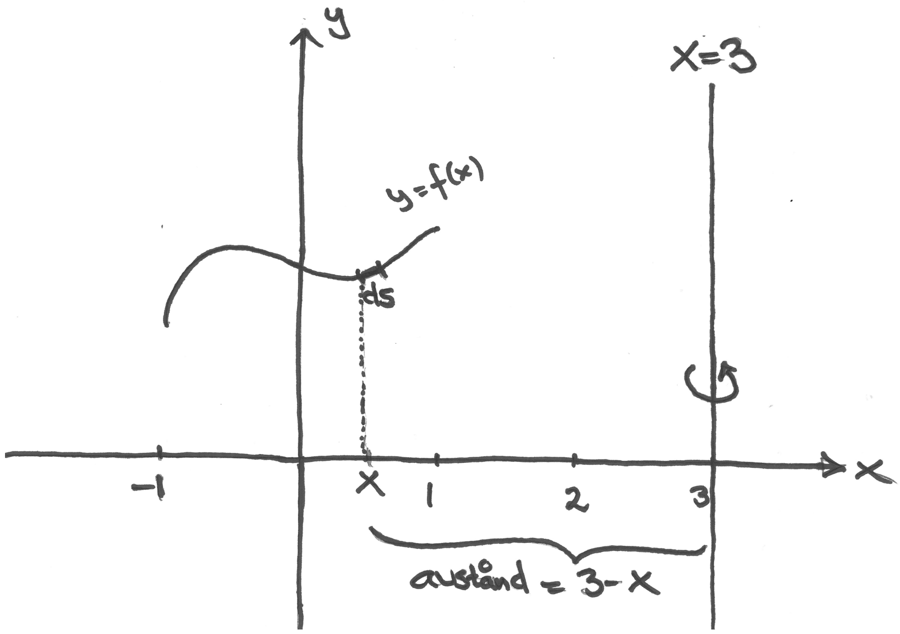
$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{x^2}\right) = x^2\frac{1}{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^2} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = x^3 + Cx^2,$$

där $C$ är en godtycklig konstant. Vi söker speciellt den lösning som uppfyller

$$0 = y(1) = 1 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -1.$$

**Svar**: $y(x) = x^3 - x^2$, $x > 0$.

3. (a) En principskiss:




(b) Tyngdpunkten för bågelementet $ds$ ligger på avståndet $3-x$ (radien) från rotationsaxeln $x=3$. Tyngdpunktens väg blir således $2\pi(3-x)$. Rotationsarean ges då enligt Pappos-Guldins regel av

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} (3-x)\, ds = 2\pi \int_{-1}^{1} (3-x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx,$$

eftersom $ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$.

(c) Om $f(x) = 6x - x^2$ blir bågelementet

$$ds = \sqrt{1+(6-2x)^2}\, dx = \sqrt{1+4(3-x)^2}\, dx, \ -1 \le x \le 1.$$

Sålunda erhåller vi rotationsarean

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} (3-x)\sqrt{1+4(3-x)^2}\, dx = \begin{bmatrix} t = 4(3-x)^2 \Rightarrow (3-x)\, dx = -\frac{1}{8}\, dt \\ x=-1 \Rightarrow t = 64;\ x = 1 \Rightarrow t = 16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{16}^{64} \sqrt{1+t}\, dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}\right]_{16}^{64} = \frac{\pi}{6}\left(65\sqrt{65} - 17\sqrt{17}\right).$$

**Svar**: (a) Se ovan. (b) Se ovan. (c) $\frac{\pi}{6}\left(65\sqrt{65} - 17\sqrt{17}\right)$.

4. Ekvationen i uppgiften är en linjär differentialekvation av ordning två. De homogena lösningarna fås genom att först hitta rötterna till det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^2 - 1 = (r+1)(r-1).$$

Vi kan formulera om ekvationen med hjälp av differentialoperatorn $p(D) = D^2 - 1$:

$$y'' - y = x(e^x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad p(D)y = xe^x + x. \tag{1}$$

Enligt välkänd sats följer nu att

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

är samtliga homogena lösningar (lösningar till $p(D)y_h = 0$). Eftersom ekvationen är linjär kan vi superpositionera lösningar och börjar med att hitta en partikulärlösning $y_{p_1}$ som löser $p(D)y_{p_1} = x$. En lämplig ansats är

$$y_{p_1} = Ax + B$$

och genom direkt insättning i ekvationen $p(D)y_{p_1} = x$ kan vi bestämma $A$ och $B$ enligt

$$-Ax - B = x \quad \Leftrightarrow \quad A = -1 \text{ och } B = 0.$$

För att hitta en partikulärlösning $y_{p_2}$ som löser $p(D)y_{p_2} = xe^x$ ansätter vi

$$y_{p_2}(x) = z(x)e^x.$$

Förskjutningsregeln medför nu att

$$p(D)y_{p_2} = p(D)\left(e^x z\right) = e^x p(D+1)z = e^x(D+2)Dz = e^x(z'' + 2z').$$

Alltså,

$$p(D)y_{p_2} = xe^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x(z'' + 2z') = xe^x \quad \Leftrightarrow \quad z'' + 2z' = x.$$

Vi söker *en* partikulärlösning, så vi ansätter $z(x) = \alpha x^2 + \beta x$ (eftersom $z$-term saknas). Då måste

$$2\alpha + 4x\alpha + 2\beta = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4} \text{ och } \beta = -\frac{1}{4}.$$

Enligt superpostionsprincipen är $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ en partikulärlösning till (1) och samtliga lösningar till (1) ges därmed av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x + \frac{1}{4}\left(x^2 - x\right)e^x. \tag{2}$$

För att bestämma $C_1$ och $C_2$ använder vi att $y(0) = y'(0) = 0$. Eftersom $y(x)$ ges av (2) och

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 + x - 1\right)e^x$$

så måste

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \text{och} \quad y'(0) = -C_1 + C_2 - 1 - \frac{1}{4} = 0$$

vilket leder till att $C_1 = -\frac{5}{8}$ och $C_2 = \frac{5}{8}$. Svaret blir således

$$y(x) = -\frac{5}{8}e^{-x} + \frac{5}{8}e^x - x + \frac{1}{4}\left(x^2 - x\right)e^x = -\frac{5}{8}e^{-x} - x + \frac{1}{4}\left(x^2 - x + \frac{5}{2}\right)e^x.$$

**Svar**: $y(x) = -\frac{5}{8}e^{-x} - x + \frac{1}{4}\left(x^2 - x + \frac{5}{2}\right)e^x.$

5. Integralen är generaliserad i både 0 och $\infty$. Vi hanterar en situation i taget och börjar med att undersöka
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^{\alpha} dx. \tag{3}$$
Vi skriver om det inre uttrycket enligt
$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right).$$
Eftersom
$$\lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^{\alpha} = 1 \in \,]0,\infty[,$$
så är integralen i (3) konvergent om och endast om
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2}}\, dx$$
är konvergent enligt jämförelsesatsen på kvotform. Den sista integralen är konvergent precis då
$$\frac{\alpha}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 2$$
enligt välkänd sats.

För att studera
$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^{\alpha} dx \tag{4}$$
skriver vi om integranden genom
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^{\alpha} &= x^{-\alpha/2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^{\alpha} = x^{-\alpha/2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right)^{\alpha} \\
&= x^{-\alpha/2}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1/2}\right)^{\alpha} \\
&= x^{-\alpha/2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)^{\alpha} \\
&= x^{-\alpha/2-\alpha}\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$
Eftersom
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha}} \in \,]0,\,\infty[$$
så är (4) konvergent om och endast om
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3\alpha/2}}\, dx$$
är konvergent. Den senare integralen konvergerar precis då $3\alpha/2 > 1$, eller ekvivalent, när $\alpha > 2/3$.

Den efterfrågade integralen i uppgiften är alltså konvergent om och endast om både (3) och (4) är konvergenta. Kravet blir således $\frac{2}{3} < \alpha < 2$.

**Svar**: $\frac{2}{3} < \alpha < 2$.

6. Vi börjar med att hitta konvergensradien för serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n x^{2n-1}} \tag{5}$$

genom att använda Cauchys rotkriterie:

$$\left| \frac{(-1)^n 2^n}{n x^{2n-1}} \right|^{1/n} = \frac{|x|^{1/n}}{n^{1/n}} \frac{2}{|x|^2} \to \frac{2}{|x|^2}, \text{ då } n \to \infty,$$

eftersom

$$\left( \frac{|x|}{n} \right)^{1/n} = \exp\left( \frac{1}{n} \ln \frac{|x|}{n} \right) \to \exp(0) = 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Således är serien (5) absolutkonvergent om

$$\frac{2}{|x|^2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \sqrt{2}$$

och divergent om $|x| < \sqrt{2}$. Vi undersöker $x = \pm\sqrt{2}$:

$$\frac{(-1)^n 2^n}{n(\pm\sqrt{2})^{2n-1}} = \frac{(-1)^n 2^n (\pm\sqrt{2})}{n 2^n} = \pm\sqrt{2} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Eftersom

$$\left| \pm\sqrt{2} \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$$

monotont (termerna **avtar** mot noll) och serien är alternerande så konvergerar den enligt Leibniz kriterie. Vi har nu visat att serien (5) är konvergent för $|x| \geq \sqrt{2}$ och divergent då $|x| < \sqrt{2}$.

För att uttrycka (5) i elementära funktioner behöver vi skriva om så vi ser vad serien summerar till:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n x^{2n-1}} = -x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{2}{x^2} \right)^n = -x \ln\left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)$$

enligt känd utveckling för $\ln(1+t)$. Alternativt, om $t = \frac{2}{x^2}$ för $x \neq 0$, så kan vi betrakta serien

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n.$$

Vi noterar att $g(0) = 0$. För $|t| < 1$ gäller att

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}.$$

Alltså är $g(t) = \ln(1+t) + C$, men vi vet att $g(0) = 0$, så $g(t) = \ln(1+t)$. Den sökta serien kan därmed skrivas $-xg\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Vi kan även notera att potensserien för detta uttryck är känt konvergent då

$$-1 < \frac{2}{x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq \sqrt{2},$$

så serien konvergerar för alla relevanta $x$ till uttrycket ovan.

**Svar**: $|x| \geq \sqrt{2}$, $-x\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$

7. Låt $x \in [0,1]$ och $n$ vara ett positivt heltal. Då är

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

enligt Lagranges sats (resttermen på Lagranges form). Här är $\xi \in [0,x]$. Vi kan stuva om i denna likhet och skriva att

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = f(x) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq f(x),$$

eftersom $f^{(n+1)}(\xi) \geq 0$ för $\xi \in [0,1]$ och $x \geq 0$. Vi har alltså begränsat delsummorna med $f(x)$ för $x \in [0,1]$. Eftersom termerna i delsummorna är icke-negativa utgör $S_n(x)$ en växande följd (för varje fixt $x \in [0,1]$) som är uppåt begränsad (av $f(x)$). Detta visar att delsummorna konvergerar till ett reellt tal då $n \to \infty$ för alla $x \in [0,1]$.

Vidare, eftersom $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \geq 0$ så följer det även att för $-1 \leq x \leq 0$ så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} |x|^k < \infty$$

eftersom $|x| \in [0,1]$ (en följd av vad vi visade för $x \in [0,1]$ ovan). Alltså är serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ är absolutkonvergent för $|x| \leq 1$ (och därmed konvergent).

**Svar**: Se ovan.