Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2015-08-27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + (4x^3 + 2x)y = 2x^3 + x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 5/2$.

2. Avgör om funktionen $f(x) = \sin(x^3+x^5) - \ln(1+x^3) - x^5$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$.

3. Bestäm den allmänna lösningen till $y^{(3)} - 3y' + 2y = xe^x$.

4. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $y = \sqrt{\frac{x^2-x^4}{8}}$, $0 \le x \le 1$ roteras ett varv kring x-axeln.

5. (a) Avgör om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + 3/n)$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 3/n^2)$ är konvergent. (1p)

   (c) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$. (1p)

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y' = y^2 + 2xy$, $x > 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.

7. Ange ett rationellt tal som approximerar $y(1/4)$ med ett fel mindre än $1/3000$ där y är den unika lösningen till $y'' + xy = x^3$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$.

Lycka till!

Tata 42, 2015-08-27, Lösningsskiss:

1. $(x^4+x^2)' = 4x^3+2x$, så $e^{x^4+x^2}$ är en integrerande faktor:

$$(e^{x^4+x^2}y)' = e^{x^4+x^2}y' + e^{x^4+x^2}(4x^3+2x)y = e^{x^4+x^2}(2x^3+x)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{x^4+x^2}y = \int (2x^3+x)e^{x^4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^4+x^2} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} + Ce^{-(x^4+x^2)}$$

$$y(0) = \frac{1}{2} + C = \frac{5}{2} \Leftrightarrow C = 2$$

SVAR: $y = \frac{1}{2} + 2e^{-x^4-x^2}$

---

2. $\sin t = t + O(t^3)$ $\qquad \ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + O(s^3)$

ger med $t = x^3+x^5$, $s = x^3$:

$$f(x) = \sin(x^3+x^5) - \ln(1+x^3) - x^5 =$$

$$= (x^3+x^5) + O((x^3+x^5)^3) - x^3 + \frac{(x^3)^2}{2} + O((x^3)^3) - x^5 =$$

$$= \frac{x^6}{2} + O(x^9) = x^6\left(\frac{1}{2} + O(x^3)\right).$$

Eftersom $f(0)=0$ och både x^6 och $\frac{1}{2}+O(x^3)$ är strängt positiva för $x \neq 0$ i någon omgivning till 0 så har $f(x)$ ett <u>lokalt strängt minimum i 0</u>.

---

3. $r^3 - 3r + 2 = (r-1)(r^2+r-2) = (r-1)(r-1)(r+2)$ ger

$y_h = (C_1x+C_2)e^x + C_3e^{-2x}$.

Låt nu $y_p = ze^x$ så att

$$y_p^{(3)} - 3y_p' + 2y_p = (D-1)^2(D+2)y_p = e^x(D-1+1)^2(D+2+1)z =$$

$$= e^x D^2(D+3)z = e^x(z^{(3)}+3z'') = xe^x \Leftrightarrow z^{(3)} + 3z'' = x$$

Ansätter vi $z'' = ax+b$ får vi $z^{(3)} = a$ och $a + 3ax + 3b = x$

vilket ger $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{9}$, så $z'' = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \Leftarrow z' = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} \Leftarrow z = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{18}$,

så $y_p = \frac{1}{18}(x^3-x^2)e^x$

SVAR: $y = (C_1x+C_2)e^x + C_3e^{-2x} + \frac{1}{18}(x^3-x^2)e^x$.

4.1 $y' = \left(\frac{x-2x^3}{8}\right)\left(\frac{x^2-x^4}{8}\right)^{-1/2}$

Arean ges av

$$2\pi \int_0^1 y\, ds \quad \text{där} \quad ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx \text{, vilket}$$

ger $$2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2-x^4}{8}} \sqrt{1+\left(\frac{x-2x^3}{8}\right)^2\left(\frac{x^2-x^4}{8}\right)^{-1}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2-x^4}{8} + \frac{x^2-4x^4+4x^6}{64}}\, dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{9x^2-12x^4+4x^6}{64}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2(3-2x^2)^2}{64}}\, dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x\sqrt{(3-2x^2)^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 x(3-2x^2)\, dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}.}}$$

5.1 a: Serien är alternerande, och termernas absolutbelopp

$\left|(-1)^n \ln(1+3/n)\right| = \ln(1+3/n)$ avtar mot noll då $n \to \infty$,

(ty, $\ln(1+t)' = \frac{1}{1+t}$ är positiv för $t > 0$ ...).

Alltså är serien <u>konvergent</u> enligt Leibniz kriterium.

b: $\ln(1+3/n^2) = \frac{3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{n^2}\left(3 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent och $0 < \lim_{n\to\infty}\left(3+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 3 < \infty$

följer från jämförelseprincipen att $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+3/n^2)$ är <u>konvergent</u>.

5c: Med $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ för $|x|<1$ får vi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{för } |x|<1.$$

$$\frac{1}{4} \cdot f'(1/4) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}.$$

6.) För $x>0$ gäller

$$x^2 y' = y^2 + 2xy \Leftrightarrow y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}$$

Med $f(s) = s^2 + 2s$ har vi att

$y' = f(\frac{y}{x})$, så ekvationen är homogen av ordning 0.

Vi sätter $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow x z(x) = y(x)$ vilket ger

$$y'(x) = x z'(x) + z(x).$$

Insatt i ekvationen får vi $x z'(x) + z(x) = z^2 + 2z$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z^2+z} = \frac{1}{x} \qquad (z^2+z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0, z \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{z^2+z} dz = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz = \ln|z| - \ln|z+1| = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right|$$

$$= \int \frac{1}{x} dx = \ln x + \ln D = \ln Dx \qquad D>0$$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z}{z+1}\right| = Dx$ Eftersom $y(1) = 1 \cdot z(1) = 1$ ger

att $\left|\frac{z(1)}{z(1)+1}\right| = \frac{1}{2} = D$ och att z är

positiv nära $x=1$ får vi att

$$\frac{z}{z+1} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow z = \frac{x}{2}(z+1) \Leftrightarrow \left(1-\frac{x}{2}\right)z = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{x/2}{1-x/2} = \frac{x}{2-x}, \quad (0<x<2).$$

$\underline{\underline{\text{Så } y = \frac{x^2}{2-x}, \quad (0<x<2).}}$

7.] Vi ansätter

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} .$$

$c_0 = c_1 = 1$, ty $y(0) = y'(0) = 1$.

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n =$$

$$= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1) c_{n+2} + c_{n-1}) x^n = x^3$$

vilket ger (med $c_0 = c_1 = 1$)

$2c_2 = 0$

$6c_3 + c_0 = 0 \iff c_3 = -1/6$

$12 c_4 + c_1 = 0 \iff c_4 = -1/12$

$20 c_5 + c_2 = 1 \iff c_5 = 1/20$

$(n+2)(n+1) c_{n+2} + c_{n-1} = 0 \quad n \geq 4$ ger nu

att $|c_{n+2}| = \left| \frac{-c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \right| = \frac{|c_{n-1}|}{(n+2)(n+1)}$

vilket vi ser innebär att

$|c_k| \leq 1$ för alla $k \geq 6$.

(Speciellt är $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergent på $|x| < 1$ åtminstone) och är alltså en lösning till ekvationen).

$$y = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \sum_{n=6}^{\infty} c_n x^n \quad \text{ger nu}$$

$$\left| y(1/4) - \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{(1/4)^3}{6} - \frac{(1/4)^4}{12} + \frac{(1/4)^5}{20}\right) \right| = \left| \sum_{n=6}^{\infty} \frac{c_n}{4^n} \right| \leq \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{4^n} =$$

$$= \frac{1}{4^6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3 \cdot 4^5} = \frac{1}{3072} .$$

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{(1/4)^3}{6} - \frac{(1/4)^4}{12} + \frac{(1/4)^5}{20} = \frac{76623}{61440} = \underline{\underline{\frac{25541}{20480}}} .$$