LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1
Datum: 2015-06-01
Institution: MAI

Tentamen i Envariabelanalys 2

TATA42/TEN1 2015-06-01 8–13

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm volymen som uppstår då området $0 \leq y \leq 1 - x^4$, $-1 \leq x \leq 1$, roterar ett varv kring $y = -2$.

2. Lös ekvationen $(1+x^2)y' - 3(x^2+x^4)y = e^{x^3}$ med villkoret $y(1) = 0$.

3. (a) Konvergerar integralen $\displaystyle\int_1^\infty \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx$? (1p)

   (b) Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{2\ln k}{4^k\sqrt{k}}\, x^{3k}$. (1p)

   (c) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^k}{\ln\frac{1}{k}}$ är konvergent. (1p)

4. Finn alla lösningar $y(x)$ till $y'' - y' - 2y = 10\, e^x \sin x$.

5. Bestäm om möjligt konstanterna a, b och c så att
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+2x^3+4x^4} - \big(ax^2+bx+c\big)\right) = 0.$$

6. Visa att $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\, x^{2k}$ är konvergent för alla $x \in \mathbf{R}$ och löser $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$.

7. För vilka $a > -2$ är $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}\, dx$ konvergent?

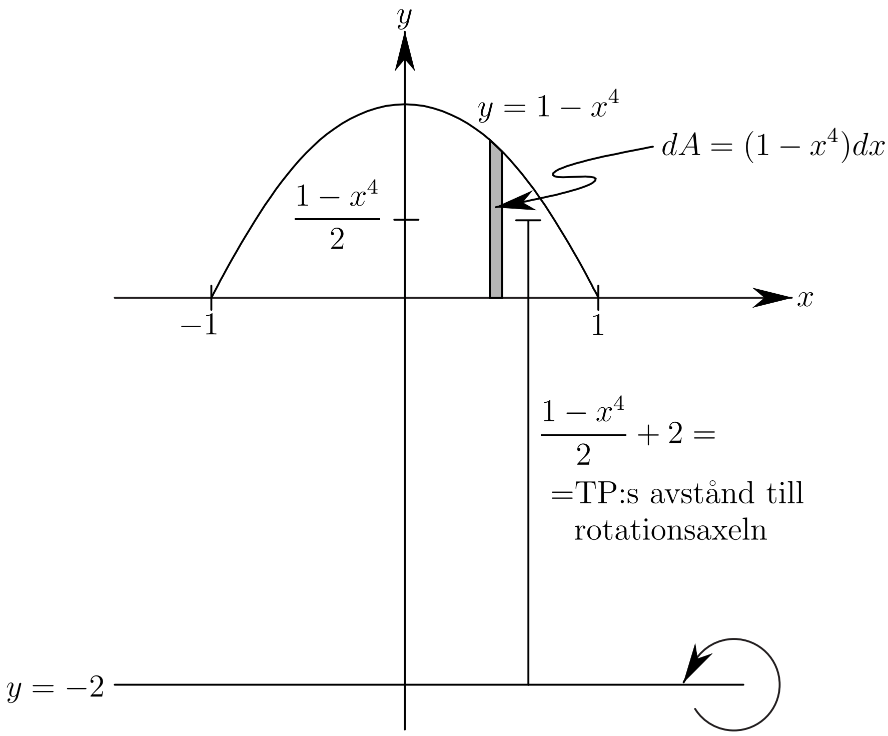
Lösningsskisser

1. **Svar**:
2. **Svar**:
3. **Svar**:
4. **Svar**:
5. **Svar**:
6. **Svar**:
7. **Svar**:

Lösningsförslag till TATA42, Envariabelanalys 2, 2015–01–06

1. Pappos-Guldins regel ger (se figur)

$$dV = \text{TP:s väg}\cdot dA = 2\pi\left(\frac{1-x^4}{2}+2\right)\left(1-x^4\right)dx = \pi\left(5-x^4\right)\left(1-x^4\right) =$$
$$= \pi\left(5-6x^4+x^8\right)dx$$
$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left(5-6x^4+x^8\right)dx = \Big[\text{jämn integrand}\Big] = 2\pi\int_0^1\left(5-6x^4+x^8\right)dx =$$
$$= 2\pi\left[5x-\frac{6}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9\right]_0^1 = 2\pi\left(5-\frac{6}{5}+\frac{1}{9}\right) = 2\pi\frac{225-54+5}{45} = \frac{352\pi}{45}$$



2. Skriv om ekvationen till standardform och bestäm Integrerande Faktorn.

$$(1+x^2)y' - 3(x^2+x^4)y = e^{x^3} \iff y' - 3\frac{x^2(1+x^2)}{1+x^2}y = \underline{\underline{y' - 3x^2y = \frac{e^{x^3}}{1+x^2}}}$$

Integrerande Faktorn $= e^{-x^3}$.

Multiplikation av ekvationen med integrerande faktorn ger

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^3}y\right) = e^{-x^3}\frac{e^{x^3}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \iff e^{-x^3}y = \int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \iff$$

$$\iff y = e^{x^3}(\arctan x + C).$$

Till slut, använd villkoret till att bestämma C.

$$y(1) = e(C + \arctan 1) = 0 \iff C + \frac{\pi}{4} = 0 \iff C = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{d v s}$$
$$y(x) = e^{x^3}\left(-\frac{\pi}{4} + \arctan x\right)$$

3. (a) Då det endast är integrandens värden för stora värden på x som har betydelse kan vi Maclaurinutveckla integranden genom att tänka $1/x$ som variabel.

$$1 - \cos\frac{1}{x} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) =$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\frac{1 - \cos 1/x}{1/x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{1/x^2} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \to \frac{1}{2} > 0 \quad \text{då } x \to \infty$$

Jämförelse på kvotform (Sats 10.13, sid 458) ger då att

$$\int_1^\infty \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx \text{ är konvergent eftersom } \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \quad \text{är det}$$

(Sats 10.12, sid 456 med $\alpha = 2 > 1$)

(b) Med $a_k = \dfrac{2\ln k}{4^k\sqrt{k}}x^{3k}$ fås

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{2\ln k}{4^k\sqrt{k}}x^{3k}\right|} = \frac{|x|^3}{4}\frac{\sqrt[k]{2}\sqrt[k]{\ln k}}{\sqrt[k]{\sqrt{k}}} \to \frac{|x|^3}{4} \quad \text{då } k \to \infty \text{ eftersom}$$
$$\sqrt[k]{2}, \sqrt[k]{\ln k}, \sqrt[k]{\sqrt{k}} = \sqrt{\sqrt[k]{k}} \to 1 \quad \text{då } k \to \infty.$$

Cauchys rotkriterium ger då att potensserien är absolutkonvergent om

$$\frac{|x|^3}{4} < 1 \iff |x|^3 < 4 \iff |x| < \sqrt[3]{4},$$

d v s konvergensradien är $\sqrt[3]{4}$.

(c) Serien är alternerande och

$$\left|\frac{(-1)^k}{\ln\frac{1}{k}}\right| = \left|\frac{1}{-\ln k}\right| = \frac{1}{\ln k}$$

som avtar mot 0 då $k \to \infty$, eftersom $\ln k$ är växande. Leibniz kriterium ger då att serien är konvergent.

4. Karakteristiska ekvationen blir

$$P(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1 \implies$$
$$P(r) = (r-2)(r+1), \quad y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Metod 1: För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p = e^x z(x)$ och använder förskjutningsregeln. Då fås

$$\begin{aligned} P(D)y_p = P(D)\,(e^x z(x)) &= \cancel{e^x} P(D+1)\,(z(x)) = 10\,\cancel{e^x}\sin x \\ P(D+1) = ((D+1)-2)((D+1)+1) &= (D-1)(D+2) = D^2 + D - 2 \implies \\ \implies P(D+1)z = z'' + z' - 2z &= 10 \sin x. \end{aligned} \tag{1}$$

Ansätt $z = A\cos x + B\sin x$ och sätt in i (1). Då fås

$$\begin{aligned} z' = -A\sin x + B\cos x, &\qquad z'' = -A\cos x - B\sin x \implies \\ z'' + z' - 2z &= -A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = \\ &= (-A + B - 2A)\cos x + (-B - A - 2B)\sin x = \\ &= (-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x = 10\sin x \implies \\ &\implies \begin{cases} -3A + B = 0 \\ {-A} - 3B = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 3A \\ -A - 3(3A) = -10A = 10 \end{cases} \iff \\ &\iff A = -1, \quad B = -3 \implies z(x) = -\cos x - 3\sin x \implies \\ \implies y_p = -e^x(\cos x + 3\sin x) &\implies y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - e^x(\cos x + 3\sin x). \end{aligned}$$

Metod 2: Då $e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$ kan man istället studera ekvationen

$$Y'' - Y' - 2Y = e^{(1+i)x}.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $Y_p = e^{(1+i)x} z(x)$. Förskjutningsregeln ger då

$$\begin{aligned} P(D)Y_p = P(D)\left(e^{(1+i)x} z(x)\right) &= \cancel{e^{(1+i)x}} P(D+1+i)\,(z(x)) = 10\,\cancel{e^{(1+i)x}} \\ P(D+1+i) = ((D+1+i)-2)((D+1+i)+1) &= (D + (-1+i))(D + (2+i)) = \\ &= D^2 + (1+2i)D - 3 + i \implies \\ \implies P(D+1+i)z = z'' + (1+2i)z' &+ (-3+i)z = 10 \implies \\ \implies z_p = \frac{10}{-3+i} &= \frac{10(-3-i)}{10} = -3 - i \implies \\ \implies Y_p = -(3+i)e^{(1+i)x} &= -e^x(3+i)(\cos x + i\sin x) = \\ &= -e^x\big((3\cos x - \sin x) + i(\cos x + 3\sin x)\big) \implies \\ \implies y_p = \operatorname{Im} Y_p &= -e^x(\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

vilket förstås är samma svar som med metod 1.

5. Bryt ut $4x^4$ ur rotuttrycket och Maclaurinutveckla detsamma.

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \mathcal{O}(t^3) = \left[\alpha = \frac{1}{2}\right] = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^3+4x^4} &= 2x^2\sqrt{1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^4}} = \\ &= 2x^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^4}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^4}\right)^3\right)\right) = \\ &= 2x^2\left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = 2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^3+4x^4} - \left(ax^2+bx+c\right) &= 2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(ax^2+bx+c\right) = \\ &= (2-a)x^2 + \left(\frac{1}{2} - b\right)x + - \left(c - \left(-\frac{1}{16}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (2)\end{aligned}$$

För att uttrycket i (2) skall ha ett ändligt gränsvärde krävs att både x^2- och x-termen försvinner, d v s $a = 2$ och $b = \dfrac{1}{2}$. Om dessutom gränsvärdet skall vara 0 så måste slutligen $c = -\dfrac{1}{16}$.

6. Låt $a_k = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\, x^{2k}$ och använd D'Alemeberts kvotkriterium. Vi får då

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{\dfrac{|x|^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2}}{\dfrac{|x|^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}} = \frac{|x|^{2k+2}}{|x|^{2k}}\,\frac{2^{2k}(k!)^2}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} = |x|^2\,\frac{2^k}{2^k\cdot 4}\,\frac{(k!)^2}{(k!)^2(k+1)^2} = \\ &= |x|^2\,\frac{1}{4(k+1)^2} \to 0 \quad \text{då } k \to \infty,\end{aligned}$$

d v s gränsvärdet är < 1 för alla $x \in \mathbb{R}$ så serien är absolutkonvergent för alla $x \in \mathbb{R}$. Sats 10.16, sid 465 ger då att potensserien är deriverbar oändligt många gånger (derivatan är ju också en potensserie som konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ och är därför deriverbar med en derivata som är en potensserie som konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ och är därför deriverbar med en derivata som är en potensserie som konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ ...). Sätt

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^3} + \ldots$$

och skriv de i ekvationen ingående termerna som potensserier. Vi får då

$$y'(x) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k D x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot b_k x^{2k-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow xy'(x) = x\sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot b_k x^{2k-1} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot b_k x^{2k}}}, \tag{3}$$

$$y''(x) = Dy'(x) = D\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot b_k x^{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1) \cdot b_k x^{2k-2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 y''(x) = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1) \cdot b_k x^{2k-2} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1) \cdot b_k x^{2k}}} \tag{4}$$

$$x^2 y(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+2} = b_0 x^2 + b_1 x^4 + b_2 x^6 + \ldots = \Big[\text{summera om}\Big] =$$

$$= \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} x^{2k}}}. \tag{5}$$

Insättning av potensserierna från (3), (4) och (5) i ekvationen ger

$$x^2y'' + xy' + x^2y = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2k(2k-1) \cdot b_k + 2k \cdot b_k + b_{k-1}\right) x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(4k^2 \cdot b_k + b_{k-1}\right) x^{2k}. \tag{6}$$

Insättning av uttrycket för b_k i koefficienten för x^{2k} i (6) och förenkling ger

$$4k^2 \cdot b_k + b_{k-1} = \frac{(-1)^k 4k^2}{2^{2k}(k!)^2} + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2(k-1)}((k-1)!)^2} = \frac{(-1)^k 4k^2}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-1)^k 2^2 k^2}{2^{2(k-1)} 2^2 ((k-1)!)^2 k^2} =$$
$$= \frac{(-1)^k 4k^2}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-1)^k 4k^2}{2^{2k}(k!)^2} = 0,$$

d v s *alla* koefficienter i potensserien i (6) är noll. Följaktligen löser $y(x)$ ekvationen.

7. Integralen är generaliserad i både 0 och oändligheten och måste delas upp i två, t ex

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)} dx.$$

Låt $0 < x < 1$.

$$\frac{\sin x}{x^a(1+x^2)} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x^{a-1}(1+x^2)} = \frac{1}{x^{a-1}} \underbrace{\frac{\sin x}{x} \frac{1}{1+x^2}}_{\to 1 \text{ då } x \to 0+}.$$

Därmed ger jämförelsesatsen på kvotform (Sats 10.13, sid 458) att

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}dx \text{ är konvergent om och endast om } \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}dx \text{ är konvergent.}$$

Enligt Sats 10.12, sid 456 är den sistanämnda integralen konvergent då

$$\alpha = a-1 < 1 \iff a < 2.$$

Den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}dx \text{ säges vara konvergent om } \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}dx \text{ existerar.}$$

Betrakta därför

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}dx = \left[-\frac{\cos x}{x^a(1+x^2)}\right]_1^R + \int_1^R \frac{\cos x}{\left(x^a(1+x^2)\right)^2}\left(ax^{a-1}(1+x^2)+2x\cdot x^{a-1}\right)dx.$$

Vi studerar integranden i den sista integralen separat.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{\left(x^a(1+x^2)\right)^2}\left(ax^{a-1}(1+x^2)+2x\cdot x^a\right) &= \frac{\cos x}{x^{2a}(1+x^2)^2}\left(ax^{a+1}(1+1/x^2)+2\cdot x^{a+1}\right) = \\
&= \frac{x^{a+1}}{x^{2a}x^4(1+1/x^2)^2}\cos x\left(a(1+1/x^2)+2\right) = \\
&= \frac{1}{x^{a+3}}\underbrace{\frac{\cos x\,(a(1+1/x^2)+2)}{(1+1/x^2)^2}}_{\text{begränsad om } x \text{ stort}}.
\end{aligned}$$

Jämförelsesatsen (Sats 10.11, sid 456) ger då att den sista integralen ovan är absolutkonvergent om $\alpha = a+3 > 1 \iff a > -2$. Då den utintegrerade biten $\to 0$ då $R \to \infty$ följer att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}dx$ är konvergent om $a > -2$ vilket var den på förhand givna undre gränsen.

Därmed har vi visat att

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a(1+x^2)}dx \text{ är konvergent om } -2 < a < 2.$$