Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2015-03-21 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' + 10y = 5x^2 + 8x + 4$.

2. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området givet av $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le e^x$ roteras ett varv kring linjen $x = -2$.

3. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{x^2}$ (1p)

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin x^2}{\sin x^4}$ (1p)

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln(\cos x) + x^2}{x^4}$ (1p)

4. Lös följande begynnelsevärdesproblem: $x^2y' - y^2 = 1,\ y(1) = 0$.

5. (a) Är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{3x^3 - 2x^2}\,dx$ konvergent? (1p)

   (b) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n n^2} x^{2n}$ är konvergent. (2p)

6. Bestäm tyngdpunkten för det område i xy-planet som i polära koordinater ges av $0 \le r \le |\varphi|$ och $|\varphi| \le \pi$.

7. Antag att $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) \ge 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och att $y(0) = y'(0) = 0$. Visa att $y(x) \ge 0$ för alla $x \ge 0$.

Lycka till!

Svar m.m., TATA42, 2015-03-21

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x^2 + 8x + 4.$

Hom: Kar. ekv.: $r^2 - 2r + 10 = 0$, $r = 1 \pm 3i$, så

$y_h = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x)$, där $A, B \in \mathbb{C}$ godtyckliga.

Part: Ansätt $y_p = ax^2 + bx + c$. $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

$$2a - 2(2ax + b) + 10(ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 8x + 4,$$

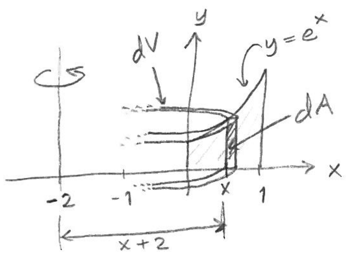
så $10a = 5$; $a = 1/2$,

$-4a + 10b = 8$; $b = 1$,

$2a - 2b + 10c = 4$; $c = 1/2$.

<u>Svar</u>: $y(x) = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x) + \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

2.



Området $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le e^x$ rot. kring $x = -2$.

$dV = 2\pi(x+2)\,dA = 2\pi(x+2)e^x\,dx$, så

$$V = \int dV = 2\pi \int_0^1 (x+2)e^x\,dx =$$

$$= 2\pi\left[(x+2)e^x - 1e^x\right]_0^1 = 2\pi(3e - e - 2 + 1).$$

<u>Svar</u>: $2\pi(2e - 1)$

3. a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x^2} = 1$, ty:

$$\frac{e^x - x - \cos x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3) - x - 1 + \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = 1 + \mathcal{O}(x) \to 1 \quad \text{då } x \to 0.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \sin x^2}{\sin x^4} = -\frac{1}{3}$, ty:

$$\frac{\sin^2 x - \sin x^2}{\sin x^4} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 - \left(x^2 + \mathcal{O}(x^6)\right)}{x^4 + \mathcal{O}(x^{12})} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6) - x^2}{x^4 + \mathcal{O}(x^{12})} = \frac{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x^8)} \to -\frac{1}{3} \quad \text{då } x \to 0.$$

forts. →

3. c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln(\cos x)+x^2}{x^4} = -\dfrac{1}{6}$, ty

$$\frac{2\ln(\cos x)+x^2}{x^4} = \frac{2\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)\right)+x^2}{x^4} =$$

$$= \frac{2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+O\left(O(x^2)^3\right)\right)+x^2}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2+\frac{x^4}{12}+O(x^6)-\frac{x^4}{4}+x^2}{x^4} = -\frac{1}{6}+O(x^2) \to -\frac{1}{6} \text{ då } x\to 0.$$

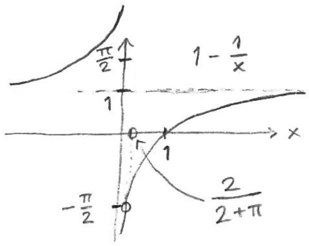
4. $x^2y'-y^2=1, \quad y(1)=0.$

$x^2\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2, \quad \displaystyle\int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{x^2}$ (för $x \neq 0$),

$\arctan y = -\dfrac{1}{x}+C$. $y(1)=0$ ger $0=-1+C$, $C=1$,

så $y=\tan\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$, definierad i det största intervall

som innehåller $x=1$ och är s.a. $-\dfrac{\pi}{2} < 1-\dfrac{1}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.



Svar: $y(x)=\tan\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$, $x>\dfrac{2}{2+\pi}$

5. a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{3x^3-2x^2}\,dx$. Gen. i ∞.

$\dfrac{1}{3x^3-2x^2} = \dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{1}{3-2/x}$. $\dfrac{1}{3-2/x} \to \dfrac{1}{3}$ då $x\to\infty$, och

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ är konv., så $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{3x^3-2x^2}\,dx$ är konvergent.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{3^n n^2}x^{2n}$.

Rotkrit.: $\sqrt[n]{\left|\dfrac{\ln n}{3^n n^2}x^{2n}\right|} = \dfrac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n^2}}\cdot\dfrac{|x|^2}{3} \to \dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{|x|^2}{3}$ då $n\to\infty$,

så serien är konv. om $\dfrac{|x|^2}{3}<1$, dvs om $|x|<\sqrt{3}$,

och divergent om $|x|>\sqrt{3}$. För $x=\pm\sqrt{3}$ fås serien

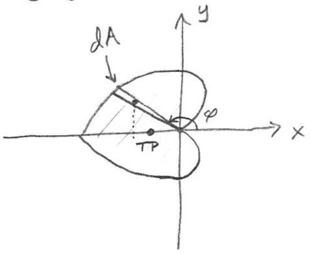
$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n^{1/2}}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$, som är konv. eftersom $\dfrac{\ln n}{n^{1/2}}$ är

begränsad då $n\geq 1$ (ty $\dfrac{\ln n}{n^{1/2}}\to 0$ då $n\to\infty$), och $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$

är konvergent.

Svar: $|x|\leq\sqrt{3}$

6. Tyngdp. för området $0 \le r \le |\varphi|$, $|\varphi| \le \pi$.



Genom symmetri fås att $y_T = 0$ och att x_T är densamma som x_T för området $0 \le r \le \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi$, så

$$A = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi = \left[\frac{\varphi^3}{6}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6}$$

$$x_T = \frac{1}{A}\int (x_T \text{ för } dA)\, dA = \frac{6}{\pi^3}\int_0^{\pi} \frac{2r}{3}\cos\varphi \cdot \frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\int_0^{\pi} \varphi^3 \cos\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi^3}\left[\varphi^3 \sin\varphi - 3\varphi^2(-\cos\varphi) + 6\varphi(-\sin\varphi) - 6\cos\varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\left(-3\pi^2 + 6 + 6\right).$$

__Svar:__ $\left(-\frac{6(\pi^2-4)}{\pi^3}, 0\right)$

7. $y'' + 3y' + 2y \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, och $y(0) = y'(0) = 0$.

Så $(D+1)(D+2)y \geq 0$. Sätt $y = e^{-x} z$. Då är $z = e^x y$,

så $z' = e^x y' + e^x y$, så $z(0) = 0$ och $z'(0) = 0$, och

$$(D+1)(D+2)(e^{-x} z) \geq 0, \quad e^{-x} D(D+1) z \geq 0, \quad (z'+z)' \geq 0.$$

Så $z' + z$ är växande, så $z' + z \geq z'(0) + z(0) = 0$ då $x \geq 0$.

Sätt $z = e^{-x} w$. Då är $w(0) = e^0 z(0) = 0$ och då $x \geq 0$ gäller att

$$(D+1)(e^{-x} w) \geq 0, \quad e^{-x} Dw \geq 0, \quad w' \geq 0.$$

Så w är växande då $x \geq 0$, så $w \geq w(0) = 0$ då $x \geq 0$.

Eftersom $y = e^{-2x} w$ följer att $y(x) \geq 0$ då $x \geq 0$.