Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2014-10-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 6y' + 8y = xe^x$.

2. Låt $f(x) = \ln(1 + x + x^3) - x\sqrt{1-x}$. Avgör huruvida $f(x)$ har ett lokalt max, ett lokalt min eller ingetdera i $x = 0$.

3. (a) Avgör om $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ är konvergent. (1p)

   (b) För vilka reella x konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$? (1p)

   (c) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. (1p)

4. Finn en kontinuerlig funktion f så att $f(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\cos t\, dt = \sin x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

5. Ett segment av kurvan $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ har sin ena ände i punkten $(x, y) = (1, 0)$. När kurvsegmentet roterar ett varv kring y-axeln uppstår en rotationsyta med arean $\frac{124\pi}{5}$ längdenheter. Hur långt är kurvsegmentet?

6. Ange ett rationellt tal som approximerar integralen $\displaystyle\int_0^{1/4} e^{-\sqrt{x}} dx$ med ett fel som till beloppet är mindre än $\frac{1}{4000}$.

7. Låt $f\ :\ ]0,\infty[\ \to\ ]0,\infty[$ vara en funktion sådan att $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ är konvergent. Antag att $a_0, a_1, a_2, \ldots$ är reella tal sådana att för varje $x > 0$ är det färre än $f(x)$ av talen som har absolutbelopp större än x. Visa att $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent.

Lycka till!

Lösningsförslag, tentamen i Envariabelanalys 2 2014-10-21

1. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 6r + 8 = 0$ har lösningarna $r = 2$ respektive $r = 4$, så den homogena lösningen är $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$, där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

   För en partikulärlösning ansätter vi förslagsvis $y_p = z(x)e^x$ vilket insatt i ekvationen ger $(z'' - 4z' + 3z)e^x = xe^x$, varför $z'' - 4z' + 3z = x$. Med ansatsen $z = Ax + B$ erhålls då $-4A + 3B + 3Ax = x$, varför $A = 1/3$, $B = 4/9$ vilket ger $y_p = (x/3 + 4/9)e^x$.

   Svar: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + (x/3 + 4/9)e^x$.

2. Med hjälp av standardutvecklingarna för $\ln(1 + t)$ respektive $\sqrt{1 + t}$ Maclaurin-utvecklas $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + x^3) - \frac{(x + x^3)^2}{2} + \frac{(x + x^3)^3}{3} + O(x^4) - x\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)\right) \\ &= (1 - 1)x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)x^3 + O(x^4) \\ &= \frac{35}{24}x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

   För x nära noll kommer alltså $f(x)$ att ha samma tecken som x, så i varje omgivning till $x = 0$ antar f både värden som är större och värden som är mindre än $f(0) = 0$. Därför är $x = 0$ varken ett lokalt max eller ett lokalt min.

3. (a) Integralen är endast generaliserad i $x = 0$. Integranden kan skrivas

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sin x}},$$

   där andra faktorn går mot 1 då $x \to 0^+$. Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent, följer det via andra jämförelsekriteriet att ursprungsintegralen också är konvergent.

   (b) Vi använder kvotkriteriet:

$$\left| \frac{(n + 1)x^{n+1}}{nx^n} \right| = |x| \frac{n + 1}{n} \to |x|, \; n \to \infty,$$

   vilket visar att konvergensradien är 1, så serien konvergerar då $|x| < 1$ och divergerar då $|x| > 1$. Då $x = \pm 1$ går termerna inte mot noll då $n \to \infty$, så vi har divergens även för dessa x.

   Svar: $-1 < x < 1$.

(c) Låt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. Med hjälp av det kända uttrycket för summan av en geometrisk serie kan vi för $|x| < 1$ skriva

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Detta ger $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n} = f(1/3) = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{4}$.

4. Förutsatt att f är deriverbar kan vi derivera den givna ekvationen med avseende på x och få

$$f'(x) + f(x)\cos x = \cos x$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\sin x}$ ger

$$(e^{\sin x} f(x))' = e^{\sin x}\cos x$$

som efter integration och omstuvning leder till

$$f(x) = e^{-\sin x}(e^{\sin x} + C) = 1 + \frac{C}{e^{\sin x}},$$

där C är någon konstant. Om $x = 0$ sätts in i ursprungsekvationen erhålls villkoret $f(0) = 0$, vilket ger $C = -1$.

Svar: $f(x) = 1 - \dfrac{1}{e^{\sin x}}$.

5. Låt a vara x-koordinaten för kurvsegmentets andra ändpunkt. Eftersom definitionsmängden för $y(x)$ är $[1,\infty[$, gäller $a > 1$.

Kurvlängdselementet är

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = \sqrt{1 + x - 1}dx = \sqrt{x}dx,$$

så rotationsarean är

$$\frac{124\pi}{5} = 2\pi\int_1^a x\sqrt{x}dx = 2\pi\left[\frac{2x^{5/2}}{5}\right]_1^a = \frac{4\pi}{5}(a^{5/2} - 1),$$

vilket ger $a^{5/2} = 32$, varför $a = 4$. Längden av kurvsegmentet är därmed

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{14}{3}$$

längdenheter.

6. Maclaurinutveckling med restterm på Lagranges form ger

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{e^\xi t^4}{24},$$

där ξ ligger mellan 0 och t. Därför har vi approximationen

$$\int_0^{1/4} e^{-\sqrt{x}} dx \approx \int_0^{1/4} \left(1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x}}{6}\right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64} - \frac{1}{480} = \frac{173}{960}.$$

Felet i denna approximation är

$$\int_0^{1/4} \frac{e^\xi x^2}{24} dx,$$

där ξ ligger mellan $-\sqrt{x}$ och 0 (och beror av x). Alltså gäller $e^\xi \leq e^0 = 1$ för alla x på integrationsintervallet, vilket ger feluppskattningen

$$0 \leq \int_0^{1/4} \frac{e^\xi x^2}{24} dx \leq \int_0^{1/4} \frac{x^2}{24} dx = \frac{1}{3 \cdot 4^3 \cdot 24} = \frac{1}{4608} < \frac{1}{4000},$$

så approximationen $\dfrac{173}{960}$ duger.

7. För att slippa diskutera absolutbelopp hela tiden antar vi utan inskränkning att $a_i > 0$ för alla i. Vi vill då helt enkelt visa att serien är konvergent.

Definiera $N :]0, \infty[\to \{0, 1, 2, \ldots\}$ genom att låta $N(x)$ beteckna antalet a_n som är större än x. Det gäller att $0 \leq N(x) < f(x)$ för alla $x > 0$. Speciellt är endast ändligt många av talen större än x för varje $x > 0$, så N är väldefinierad.

Först påstår vi att det går att omordna talsviten så att talen kommer i (svagt) avtagande ordning. För att inse det, låt $x_0 > x_1 > \cdots > 0$ vara en följd som avtar mot noll. Ordna först de a_n som ligger i intervallet $[x_0, \infty[$ i avtagande ordning. Låt sedan dessa följas av talen i $[x_1, x_0[$ i avtagande ordning. Dessa följs i sin tur av talen i $[x_2, x_1[$, och så vidare. Eftersom vart och ett av intervallen bara innehåller ändligt många tal kommer alla tal att komma med, i avtagande ordning, med denna procedur.

I en positiv serie påverkas inte konvergensegenskapen av omordning av termerna. Vi antar därför utan inskränkning att $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$.

Vissa av talen kan förstås vara lika; låt $b_0 > b_1 > b_2 > \cdots$ vara de *olika* tal som förekommer i talföljden och låt $s(i)$ beteckna antalet a_n som är lika med b_i. Då har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) b_n.$$

Notera vidare att $s(n) = N(b_{n+1}) - N(b_n)$, ty talen som är lika med b_n är de som är större än b_{n+1} men inte större än b_n.

Betrakta nu området Ω givet av $0 \leq x \leq b_0$, $0 < y \leq N(x)$ i xy-planet. Eftersom $N(b_0) = 0$ och $N(x)$ är konstant lika med $N(b_{n+1})$ på intervallet $[b_{n+1}, b_n[$, kan Ω

delas upp i rektanglar där den n:e rektangeln ges av $0 \leq x < b_n$, $N(b_n) < y \leq N(b_{n+1})$. Rektangelns area är således $(N(b_{n+1}) - N(b_n)) \cdot b_n = s(n)b_n$, varför ett uttryck för Ω:s area är

$$A(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Å andra sidan kan vi beräkna denna area genom att integrera N:

$$A(\Omega) = \int_0^{b_0} N(x)dx.$$

Denna integral är endast generaliserad i $x = 0$. Eftersom $0 \leq N(x) < f(x)$ för $x > 0$ och integralen av f är konvergent, följer det av första jämförelsekriteriet att $A(\Omega)$ är ändlig, varför serien är konvergent. $\square$