Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2014-08-28 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + (3x^2+3)y = x^2+1$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 4/3$.

2. Antag att $f(x) \geq 2x$ då $0 \leq x \leq 1$, låt C vara kurvan $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, och låt D vara området $\{(x, y);\ 0 \leq x \leq 1,\ 2x \leq y \leq f(x)\}$. Bestäm en formel för:
   (a) arean av ytan som fås då C roteras ett varv kring linjen $x = -2$. (1p)
   (b) volymen av kroppen som fås då D roteras ett varv kring linjen $y = -1$. (1p)
   (c) volymen av kroppen som fås då D roteras ett varv kring linjen $y = 2x$. (1p)

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' - 8y = \cos 3x$.

4. (a) Avgör om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 1/n^3)$ är konvergent. (1p)
   (b) Avgör om integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{1/x^2}\,dx$ är konvergent. (1p)
   (c) Bestäm konvergensradien för $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\sin(1/n^2)x^n$. (1p)

5. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 2x + 2x^2) - 2x}{\arctan x^3}$. (2p)
   (b) Avgör om $\ln(1 + 2x + 2x^2) - 2x$ har lokalt extremvärde i $x = 0$. (1p)

6. Visa att $\displaystyle 1 - \frac{x^2}{2} - \sqrt{1 - x^2} \leq \frac{x^4}{3\sqrt{3}}$ då $|x| \leq 1/2$.

7. Antag att funktionen $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar och att det finns en följd av punkter $1 > x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > 0$ sådana att $f(x_{2n-1}) = x_{2n-1}$ och $f(x_{2n}) = -x_{2n}$ för $n \geq 1$. Gäller då att kurvan $y = f(x)$, $0 < x < 1$, har oändlig längd (bevisa eller ge motexempel)?

Lycka till!

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2014-08-28

1. Eftersom $(x^3+3x)' = 3x^2+3$ gäller att

$$\begin{aligned}
&y' + (3x^2+3)y = x^2+1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^3+3x}(y' + (3x^2+3)y) = (\mathrm{e}^{x^3+3x}y)' = (x^2+1)\mathrm{e}^{x^3+3x}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^3+3x}y = \int (x^2+1)\mathrm{e}^{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+3x} + C\\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} + C\mathrm{e}^{-(x^3+3x)}.
\end{aligned}$$

$$y(0) = \frac{1}{3} + C = \frac{4}{3} \Leftrightarrow C = 1.$$

Svar: $y = \frac{1}{3} + \mathrm{e}^{-(x^3+3x)}$.

2a. Tyngdpunktens väg för båglängdselementet $ds = \sqrt{1+f'(x)^2}dx$ ges av $2\pi(2+x)$. Enligt Guldins regel ges därför arean av

$$\int_0^1 2\pi(2+x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Svar: $\int_0^1 2\pi(2+x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

2b. För ett areaelement $dA = (f(x)-2x)dx$ är tyngdpunktens väg

$$2\pi\left(\frac{f(x)+2x}{2} + 1\right) = \pi(f(x)+2x+2),$$

så totala volymen ges enligt Guldins regel av

$$\int_0^1 \pi(f(x)+2x+2)(f(x)-2x)dx.$$

Svar: $\int_0^1 \pi(f(x)+2x+2)(f(x)-2x)dx$.

2c. Tyngdpunkten till ett areaelement $dA = (f(x)-2x)dx$ har vinkelrätt avstånd till linjen $y = 2x$ som ges av

$$\frac{f(x)-2x}{2\sqrt{5}},$$

så enligt Guldin ges volymen av

$$\int_0^1 2\pi\frac{f(x)-2x}{2\sqrt{5}}(f(x)-2x)dx = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{5}}(f(x)-2x)^2dx.$$

Svar: $\int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{5}}(f(x)-2x)^2dx$.

3. $r^2 - 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow r = 4$ eller $r = -2$. Så homogenlösningarna ges av

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

För partikulärlösningen kan vi ansätta

$$y_p = a\cos 3x + b\sin 3x.$$

Detta ger

$$y_p' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x, \quad y_p'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x.$$

Insatt i ekvationen får vi

$y_p'' - 2y_p' - 8y_p = (-9a\cos 3x - 9b\sin 3x) - 2(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x) - 8(a\cos 3x + b\sin 3x) =$
$(-9a - 6b - 8a)\cos 3x + (-9b + 6a - 8b)\sin 3x = \cos 3x.$

Så vi vill ha

$$\begin{cases} -17a - 6b = 1 \\ -17b + 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -17/325 \\ b = -6/325 \end{cases}.$$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} - \frac{17}{325}\cos 3x - \frac{6}{325}\sin 3x.$

4a. Eftersom $\ln(1 + 1/n^3) = 1/n^3 + \mathcal{O}(1/n^6)$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/n^3)}{1/n^3} = 1 \quad (0 < 1 < \infty).$$

Dessutom vet vi att $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ är konvergent, och alltså följer det att serien är konvergent enligt jämförelseprincipen på gränsvärdesform.

Svar: Konvergent.

4b. Eftersom $e^{1/x^2} \geq 1$ för alla $x \in [1, \infty[$ gäller att

$$\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{1/x^2} dx \geq \int_1^{\infty} 1 dx = \infty,$$

alltså är integralen divergent.

Svar: Divergent.

4c. Vi använder kvottestet:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3\sin(1/(n+1)^2) x^{n+1}}{3\sin(1/n^2) x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/(n+1)^2)}{\sin(1/n^2)} |x| =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/(n+1)^2)/(1/(n+1)^2)}{\sin(1/n^2)/(1/n^2)} \frac{n^2}{(n+1)^2} |x| = |x|.$$

Alltså är konvergensradien 1.

Svar: 1.

5a. Eftersom $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 + \mathcal{O}(t^4)$ och $\arctan s = s + \mathcal{O}(s^3)$ får vi med $t = 2x + 2x^2$ och $s = x^3$ att

$$\ln(1+2x+2x^2) - 2x = 2x + 2x^2 - \frac{(2x+2x^2)^2}{2} + \frac{(2x+2x^2)^3}{3} + \mathcal{O}((2x+2x^2)^4) - 2x = \frac{-4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4),$$
$$\arctan(x^3) = x^3 + \mathcal{O}(x^9).$$

Alltså får vi

$$\frac{\ln(1+2x+2x^2) - 2x}{\arctan x^3} = \frac{\frac{-4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{x^3 + O(x^9)} = \frac{\frac{-4}{3} + \mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x^6)} \to \frac{-4}{3} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $-4/3$.

5b. Enligt ovan gäller att $\ln(1 + 2x + 2x^2) - 2x = -4x^3/3 + \mathcal{O}(x^4) = -4x^3/3(1 + \mathcal{O}(x))$. Detta uttryck är negativt för positiva x nära noll och positivt för negativa x nära noll, så alltså är det ingen extrempunkt.

Svar: Ej lokalt extremvärde i $x = 0$.

6. Låt $f(t) = \sqrt{1+t}$ så att $f'(t) = (1+t)^{-1/2}/2$ och $f''(t) = -(1+t)^{-3/2}/4$. Taylors formel med Lagranges restterm ger nu att för $t \leq 0$ gäller

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(s)}{2}t^2 = 1 + \frac{t}{2} - \frac{(1+s)^{-3/2}}{8}t^2$$

för något $s \in [t, 0]$. Alltså får vi med $t = -x^2$ att

$$1 - \frac{x^2}{2} - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{(1+s)^{-3/2}}{8}x^4\right) = \frac{(1+s)^{-3/2}}{8}x^4$$

för något $s \in [-x^2, 0]$. Men för $|x| \leq 1/2$ gäller att $-1/4 \leq -x^2 \leq 0$, och alltså ligger s i intervallet $[-1/4, 0]$. Funktionen

$$\frac{(1+s)^{-3/2}}{8}$$

tar på detta intervall sitt maxvärde då $s = -1/4$, vilket ger värdet

$$\frac{(1-1/4)^{-3/2}}{8} = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

och alltså gäller att

$$\frac{(1+s)^{-3/2}}{8}x^4 \leq \frac{x^4}{3\sqrt{3}}$$

för alla $s \in [-1/4, 0]$, vilket visar olikheten.

7. Låt till exempel $f(x) = x\sin(1/\sqrt{x})$. Denna funktion är lätt att se att den uppfyller de ställda villkoren på f, och

$$\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\sin(1/\sqrt{x}) - \frac{\cos(1/\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x + \left(\sqrt{x}\sin(1/\sqrt{x}) - \frac{\cos(1/\sqrt{x})}{2}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

Eftersom

$$\sqrt{x + \left(\sqrt{x}\sin(1/\sqrt{x}) - \frac{\cos(1/\sqrt{x})}{2}\right)^2}$$

är begränsad på $]0,1[$ och $\int_0^1 (1/\sqrt{x})dx$ är konvergent så följer det att kurvlängden ovan också är ändlig. Så för vissa val av f fås en ändlig kurvlängd.

Svar: Kurvan kan ha ändlig längd.