Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2014-06-02 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$, $x > 0$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(\pi) = \frac{2}{\pi^2}$.

2. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området

   $0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$ roteras ett varv kring y-axeln.

3. Bestäm alla lösningar till $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{-x}$.

4. (a) Avgör om $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{x+1}\,dx$ är konvergent. (1p)

   (b) Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{2^k + k^2}$. (1p)

   (c) Avgör om $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{k \sin k}{k^3+4}$ är absolutkonvergent. (1p)

5. Räkna ut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(ax) + x^2}{\cos x - \sqrt{1+ax^2}}$ för alla reella värden på konstanten a.

6. Bestäm arean av ytan som fås då kurvan som i polära koordinater ges av

   $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, roteras ett varv kring linjen $y = x$.

7. Antag att $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty u_k$ och $\sum_{k=1}^\infty u_k^2$ är konvergenta. Bevisa att

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$ existerar ändligt.

Lycka till!

Lösningsförslag, tentamen i Envariabelanalys 2 2014-06-02

1. Om ekvationen multipliceras med den integrerande faktorn x^2 erhålls ekvationen $(x^2y)' = \cos x$, varför den allmänna lösningen blir
$$y(x) = \frac{C + \sin x}{x^2},$$
där C är en godtycklig konstant. Villkoret $C/\pi^2 = y(\pi) = 2/\pi^2$ ger $C = 2$. Därför är $y(x) = (2 + \sin x)/x^2$ den sökta lösningen.

2. Då en strimla med tjocklek dx av området roterar kring y-axeln uppstår en rörformad kropp med volymselementet $dV = 2\pi x \sin x dx$. Hela rotationsvolymen är alltså
$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi[-x\cos x]_0^\pi + 2\pi \int_0^\pi \cos x dx = 2\pi^2$$
volymenheter.

3. Karakteristiska polynomet $r^3 + 2r^2 - r - 2$ har rötterna $r = -2$, $r = -1$ och $r = 1$, så den homogena lösningen är $y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x$, där C_i är godtyckliga konstanter.

   För en partikulärlösning ansätter vi förslagsvis $y_p = z(x)e^{-x}$. Sätts denna ansats in i vänsterledet fås, via förskjutningsregeln,
$$\begin{aligned}(D^3 + 2D^2 - D - 2)ze^{-x} &= e^{-x}((D-1)^3 + 2(D-1)^2 - (D-1) - 2)z \\ &= e^{-x}(D^3 - D^2 - 2D)z \\ &= e^{-x}(z''' - z'' - 2z'),\end{aligned}$$
så vänsterledet blir lika med högerledet om $z''' - z'' - 2z' = 1$, vilket är fallet då $z(x) = -x/2$.

   Slutsats: $y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + (C_2 - x/2)e^{-x} + C_3e^x$.

4. (a) Integralen är endast generaliserad i oändligheten. Integranden kan skrivas
$$\frac{\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x+1} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{1}{x}},$$
där andra faktorn går mot 1 då $x \to \infty$. Integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent, så andra jämförelsekriteriet visar att ursprungsintegralen också är konvergent.

   (b) Beloppet av kvoten mellan två på varandra följande termer är
$$\left| \frac{x^{k+1}}{2^{k+1} + (k+1)^2} \Big/ \frac{x^k}{2^k + k^2} \right| = \frac{1 + \frac{k^2}{2^k}}{2 + \frac{(k+1)^2}{2^k}}|x| \to \frac{|x|}{2}, \quad k \to \infty,$$
så kvotkriteriet visar att konvergensradien är 2.

(c) För positiva k kan allmänna termens belopp uppskattas enligt

$$0 \le \left| \frac{k \sin k}{k^3 + 4} \right| \le \frac{k}{k^3+4} < \frac{1}{k^2}.$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent, visar första jämförelsekriteriet att även $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{k \sin k}{k^3+4} \right|$ konvergerar, så ursprungsserien är absolutkonvergent.

5. Beteckna med $F(x)$ det uttryck vars gränsvärde ska bestämmas. Med hjälp av standardutvecklingar fås

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x(ax - a^3x^3/6 + O(x^5)) + x^2}{1 - x^2/2 + x^4/24 + O(x^6) - (1 + ax^2/2 - a^2x^4/8 + O(x^6))} \\ &= \frac{(a+1)x^2 - a^3x^4/6 + O(x^6)}{-(a+1)x^2/2 + (1/24 + a^2/8)x^4 + O(x^6)}. \end{aligned}$$

Om $a \neq -1$ kan vi förkorta bort $(a+1)x^2$, varpå

$$F(x) = \frac{1 + O(x^2)}{-1/2 + O(x^2)} \to -2, \quad x \to 0.$$

Om istället $a = -1$, försvinner andragradstermerna. Efter att vi förkortat bort x^4 fås i detta fall

$$F(x) = \frac{1/6 + O(x^2)}{1/6 + O(x^2)} \to 1, \quad x \to 0.$$

Svar: Om $a \neq -1$ är gränsvärdet -2. Om $a = -1$ är gränsvärdet 1.

6. På parameterform kan kurvan skrivas $x = \sqrt{\cos 2\varphi} \cos\varphi$, $y = \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$. Båglängdselementet är

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi = \\ &= \sqrt{\left(\frac{-\sin 2\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi \right)^2 + \left(\frac{-\sin 2\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + \sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi \right)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \end{aligned}$$

(Den som till äventyrs lärt sig formeln för båglängdselementet i polära koordinater kan undkomma delar av kalkylen ovan.)

Avståndet från en punkt på kurvan $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ till rotationsaxeln $y = x$ är $r\sin(\pi/4 - \varphi) = \sqrt{\cos 2\varphi}\sin(\pi/4 - \varphi)$, så arean är

$$A = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi}\sin(\pi/4 - \varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(\pi/4 - \varphi) d\varphi = 2\pi$$

areaenheter.

7. Eftersom $\sum u_k$ konvergerar gäller $u_k \to 0$ då $k \to \infty$. Speciellt finns något N så att $(1+u_i) > 0$ för alla $i > N$. Utan förlust av generalitet kan därför antas att $(1+u_i) > 0$ för alla i. Då kan vi skriva

$$(1+u_1)\cdots(1+u_n) = \exp(\ln(1+u_1)+\cdots+\ln(1+u_n)),$$

som har ett ändligt gränsvärde då $n \to \infty$ om serien $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1+u_i)$ konvergerar.

Det gäller att $\ln(1+x) = x + b(x)x^2$, där $b(x)$ är någon funktion som är begränsad i en omgivning till noll. Alltså finns positiva konstanter $C, \epsilon > 0$ så att $|b(x)| < C$ så fort $|x| < \epsilon$. Eftersom $u_k \to 0$ då $k \to \infty$, finns något M så att $|u_i| < \epsilon$, och således $|b(u_i)| < C$, för alla $i \geq M$.

Vi har

$$\sum_{i=M}^{\infty} \ln(1+u_i) = \sum_{i=M}^{\infty}(u_i + b(u_i)u_i^2) = \sum_{i=M}^{\infty} u_i + \sum_{i=M}^{\infty} b(u_i)u_i^2,$$

där sista likheten gäller, och ursprungsserien är konvergent, förutsatt att de båda serierna i högerledet konvergerar. Det är givet att den förra av dessa konvergerar. Den senare är (absolut-) konvergent via första jämförelsekriteriet eftersom det gäller att $0 \leq |b(u_i)u_i^2| < Cu_i^2$ och $\sum Cu_i^2 = C\sum u_i^2$ är konvergent. $\square$