Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2014-03-22 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 10x + 9$.

2. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x(\sin x - \arctan x)}$.

3. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n+2^n}$ är konvergent. (2p)

4. Låt C vara den kurva som i polära koordinater ges av $r = \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Beräkna arean av den yta som fås då C roteras ett varv kring linjen $x = -1$.

5. Betrakta differentialekvationen $y' = y^3 \cos x$.

   (a) Bestäm den lösning (inklusive dess största möjliga definitionsmängd) som uppfyller $y(0) = 1$. (2p)

   (b) För vilka $a > 0$ är den lösning som uppfyller $y(0) = a$ begränsad? (1p)

6. Bestäm en lösning till $y'' - 2xy' - 2y = 0$ som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

7. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^n$.

Lycka till!

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2014-03-22

1. *Homogen ekvation:* $y_h'' + 2y_h' + 5y_h = 0$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 + 2i \text{ eller } r = -1 - 2i, \text{ så:}$$

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) + C_2 \mathrm{e}^{-x} \sin(2x) \quad (C_1, C_2 \text{ konstanter}).$$

(alternativt $y_h = D_1 \mathrm{e}^{(-1+2i)x} + D_2 \mathrm{e}^{(-1-2i)x}$.)

Partikuläransats: $y_p = ax + b$ ger $2a + 5(ax + b) = 10x + 9$ vilket ger $a = 2, b = 1$.

Svar: $y = C_1 \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) + C_2 \mathrm{e}^{-x} \sin(2x) + 2x + 1$.

2. Eftersom $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3)$ så får vi med $t = -x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x(\sin x - \arctan x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)) - (1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6))}{x((x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)) - (x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)))} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{4x^4}{24} + O(x^6)}{\frac{x^4}{6} + O(x^6)} = 1.$$

Svar: 1

3a. Eftersom $0 \leq 2/(n^2 + n) \leq 2/n^2$ då $n \geq 1$ och vi vet att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

är konvergent, så följer enligt jämförelseprincipen att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$ är konvergent.

Svar: konvergent

3b. Vi använder kvottestet:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}}}{\frac{x^n}{3^n+2^n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}} |x| =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + (2/3)^n}{3 + 2(2/3)^n} |x| = \frac{|x|}{3}$$

Alltså har potensserien konvergensradie 3. I ändpunkterna $x = \pm 3$ ser vi dock att termerna blir $\frac{(\pm 3)^n}{3^n + 2^n}$ som inte går mot noll då $n \to \infty$, alltså divergerar serien i dessa.

Svar: konvergent då $-3 < x < 3$

4. Vi har att för ett ds-element gäller att tyngdpunktens väg ges av $2\pi(x + 1) = 2\pi(r \cos \varphi + 1) = 2\pi(\cos^2 \varphi + 1)$. Vidare ges ds av

$$ds = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\frac{d}{d\varphi} \cos \varphi)^2}\, d\varphi = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}\, d\varphi = d\varphi.$$

Alltså ges arean enligt Guldins regel av

$$\int_0^{\pi/4} 2\pi(\cos^2\varphi + 1)d\varphi = \int_0^{\pi/4} 2\pi\frac{3+\cos(2\varphi)}{2}d\varphi =$$
$$2\pi\left[\frac{6\varphi+\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi^2+2\pi}{4}.$$

Svar: $\frac{3\pi^2+2\pi}{4}$

5a. Om $y \neq 0$ är ekvationen ekvivalent med

$$\frac{1}{y^3}y' = \cos x.$$

Det vill säga

$$\int \frac{1}{y^3}dy = \int \cos x dx \Leftrightarrow \frac{-1}{2y^2} = \sin x - C/2 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{C-2\sin x}}$$

Med $y(0) = 1$ måste vi välja $+$ ovan, och får $1 = 1/\sqrt{C-2\sin 0} = 1/\sqrt{C}$ får vi $C = 1$. Det vill säga $y = 1/\sqrt{1-2\sin x}$. Denna funktion är definierad då $1 - 2\sin x > 0$, och vi ska välja största möjliga intervall där detta håller som innehåller punkten $x = 0$. Detta ger intervallet $-7\pi/6 < x < \pi/6$.

Svar: $y = 1/\sqrt{1-2\sin x}$, $-7\pi/6 < x < \pi/6$.

5b. Som ovan får vi nu $y = 1/\sqrt{C-2\sin x}$ med $a = 1/\sqrt{C}$. Det vill säga $C = 1/a^2$. Lösningen är begränsad om vi har en strikt olikhet

$$C - 2\sin x = \frac{1}{a^2} - 2\sin x > 0 \text{ för alla } x.$$

Detta håller om och endast om $\frac{1}{a^2} - 2 > 0$, vilket eftersom $a > 0$ ger att $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Om vi antar att $y(x)$ löser problemet och definierar $z(x) = y(-x)$ så ser vi att denna också löser problemet. Därför är lösningen en jämn funktion. (Detta argument bygger egentligen på att vi vet att lösningen är unik, vilket vi inte har några satser i denna kurs som garanterar. Även om vi inte visste att lösningen var unik vore det ju i alla fall rimligt att börja leta efter en jämn lösning till problemet). Vi gör därför ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.$$

Notera att $y(0) = a_0$ samt att $y'(0) = 0$ automatiskt med denna ansats. Detta ger

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^{2n-1}, \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n}.$$

Detta ger ekvationen

$$y'' - 2xy' - 2y = \sum_{n=0}^{\infty}((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 4na_n - 2a_n)x^{2n} = 0.$$

Det vill säga

$$(2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 4na_n - 2a_n = 0$$

vilket är ekvivalent med att

$$a_{n+1} = \frac{(4n+2)a_n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{a_{n-1}}{n} = \ldots = \frac{a_0}{(n+1)!}.$$

Eftersom $a_0 = y(0) = 1$ får vi alltså $a_n = 1/n!$ så

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x^2}.$$

Svar: $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad (= \mathrm{e}^{x^2})$

7. Vi noterar att

$$\frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

Eftersom

$$(1 - k/n)^n = \mathrm{e}^{\ln(1-k/n)^n} = \mathrm{e}^{n \ln(1-k/n)}$$

och $\ln(1+x) \leq x$ för alla $x > -1$ (vilket lätt visas genom att studera funktionen $\ln(1+x) - x$) så får vi olikheten

$$(1 - k/n)^n \leq \mathrm{e}^{-k} \text{ för alla } n.$$

Dessutom har vi

$$(1 - k/n)^n = \mathrm{e}^{\ln(1-k/n)^n} = \mathrm{e}^{n \ln(1-k/n)} = \mathrm{e}^{n(-k/n + O(1/n^2))} \to \mathrm{e}^{-k} \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså gäller för varje $m \leq n - 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} (1 - k/n)^n = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{-k} = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-m}}{\mathrm{e} - 1} \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k/n)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$$

(Ovan har vi implicit antagit att gränsvärdet i uppgiften existerar. Om man vill visa detta kan man t.ex. visa att funktionen $(1 - k/x)^x = \mathrm{e}^{x \ln(1-k/x)}$ för $x > k$ är växande, så att följden $\sum_{k=0}^{n-1} (1 - k/n)^n$ är växande). Enligt instängningsprincipen för gränsvärden (eftersom $(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-m})/(\mathrm{e} - 1)$ går mot $\mathrm{e}/(\mathrm{e} - 1)$ då $m \to \infty$) är det sökta gränsvärdet $\mathrm{e}/(\mathrm{e} - 1)$

Svar: $\mathrm{e}/(\mathrm{e} - 1)$