Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2013-10-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till $y' + y\cos x = \cos x$ som uppfyller $y(0) = 2$.

2. Beräkna längden av kurvan
$$C : \begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}, \ 0 \leq t \leq 1.$$

3. Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad 3 sådant att
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x + x^2) - p(x)}{x^4}$$
existerar ändligt och räkna ut gränsvärdet då.

4. (a) Avgör om $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+4}$ är konvergent. (1p)

   (c) Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\sin(1/n^2)} - 1)$ är konvergent. (1p)

5. (a) Bestäm de reella konstanterna a och b så att funktionen $y(x) = a\ln x + \dfrac{b}{x^2}$ är en lösning till differentialekvationen $y''' + y' = \dfrac{x^4 - 24}{x^5}$, $x > 0$. (1p)

   (b) Finn alla lösningar till $y''' + y' = \dfrac{x^4 - 24}{x^5} + e^{-x}$, $x > 0$. (2p)

6. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området i xy-planet som ges av olikheterna $1 \leq x \leq e$, $\ln x \leq y \leq x$ roterar ett varv kring linjen $y = x$.

7. Antag att $y(x)$ löser differentialekvationen $4y''' + 3\arctan\left((y + y' + y'')^2\right) = 0$ med bivillkoren $y(1) = y'(1) = y''(1) = 2$. Approximera $y(6/5)$ med ett rationellt tal som är högst en tusendel från det verkliga värdet.

Lycka till!

Lösningsförslag, tentamen i Envariabelanalys 2 2013-10-21

1. Om ekvationen multipliceras med den integrerande faktorn $e^{\sin x}$ fås ekvationen $(e^{\sin x}y)' = e^{\sin x}\cos x$, så att den allmänna lösningen blir

$$y(x) = e^{-\sin x}\int e^{\sin x}\cos x dx = 1 + Ce^{-\sin x},$$

där C är en godtycklig konstant. Villkoret $1+C = y(0) = 2$ ger den sökta lösningen $y(x) = 1 + e^{-\sin x}$.

2. Båglängdselementet är $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \sqrt{16t^2 + 9t^4}dt$, varför kurvans längd är

$$L = \int_0^1 \sqrt{16t^2+9t^4}dt = \int_0^1 t\sqrt{16+9t^2}dt = \frac{1}{27}\left[(16+9t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{61}{27}$$

längdenheter.

3. Genom att sätta in $t = 2x + x^2$ i den kända Maclaurinutvecklingen för $\cos t$ fås

$$\begin{aligned}\cos(2x+x^2) &= 1 - \frac{1}{2}(2x+x^2)^2 + \frac{1}{24}(2x+x^2)^4 + O((2x+x^2)^6) = \\ &= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{1}{6}x^4 + O(x^5).\end{aligned}$$

För att det aktuella gränsvärdet ska bli ändligt måste alltså det sökta tredjegradspolynomet vara $p(x) = 1 - 2x^2 - 2x^3$. I så fall fås

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x+x^2) - p(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4 + O(x^5)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} + O(x)\right) = \frac{1}{6}.$$

4. (a) Integralen är endast generaliserad i oändligheten. Integranden kan skrivas $\dfrac{x-1}{x^3+x^2} = \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$, där andra faktorn går mot 1 då $x\to\infty$. Integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent, så andra jämförelsekriteriet visar att ursprungsintegralen också är konvergent.

   (b) Allmänna termen kan skrivas $\dfrac{2n-1}{n^3+4} = \dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{2-1/n}{1+4/n^3}$, där andra faktorn går mot 2 då $n\to\infty$. Serien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent, så andra jämförelsekriteriet visar att ursprungsserien också är konvergent.

(c) Med Maclaurinutveckling kan allmänna termen skrivas $n\left(e^{\sin(1/n^2)}-1\right) = n(1+(1/n^2+O(1/n^6))+O((1/n^2+O(1/n^6))^2)-1) = 1/n+O(1/n^3) = \frac{1}{n}\cdot(1+O(1/n^2)$, där andra faktorn går mot 1 då $n\to\infty$. Serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ är divergent, så andra jämförelsekriteriet visar att ursprungsserien också är divergent.

5. (a) Vi har $y'(x) = a/x - 2b/x^3$ respektive $y'''(x) = 2a/x^3 - 24b/x^5$, varför

$$y''' + y' = a/x + (2a-2b)/x^3 - 24b/x^5,$$

vilket är lika med $(x^4-24)/x^5$ då $a = b = 1$.

(b) Karakteristiska ekvationen $r^3+r = 0$ har rötterna $r = 0$ respektive $r = \pm i$, så den homogena lösningen är $y_h = C_1+C_2\sin x+C_3\cos x$, där C_i är godtyckliga konstanter. För en partikulärlösning kan vi enligt superpositionsprincipen addera lösningen från (a)-uppgiften med en partikulärlösning till ekvationen $y'''+y' = e^{-x}$. Ansatsen $y_p = Ae^{-x}$ leder till $-2A = 1$, varför vår allmänna lösning blir $y(x) = C_1 + C_2\sin x + C_3\cos x + \ln x + 1/x^2 - e^{-x}/2$.

6. Dela upp området i smala remsor med tjocklek dx. Höjden på en sådan remsa är $x - \ln x$. När remsan roterar sveper den ut en kropp vars volym enligt Guldin är $2\pi r(x)(x-\ln x)dx$, där $r(x)$ är avståndet från remsans tyngdpunkt till linjen $y = x$. Med hjälp av Pythagoras får vi $r(x) = (x-\ln x)/(2\sqrt{2})$. Således är den sökta volymen

$$V = \int_{x=1}^{e} dV = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_1^e (x-\ln x)^2 dx.$$

Integralen kan beräknas genom att utveckla kvadraten och därefter integrera partiellt. Man får då $V = \pi(e^3/3 - e^2/2 + e - 17/6)/\sqrt{2}$ volymenheter.

7. Genom att Taylorutveckla $y(x)$ kring $x = 1$ med resttermen på Lagranges form får vi

$$y(6/5) = y(1) + y'(1)(6/5-1) + \frac{y''(1)(6/5-1)^2}{2} + \frac{y'''(c)(6/5-1)^3}{6},$$

där c ligger mellan 1 och 6/5.

Eftersom $\arctan t \in [0,\pi/2)$ för $t \geq 0$ kan vi uppskatta resttermen enligt

$$\frac{y'''(c)(6/5-1)^3}{6} = -\frac{3\arctan((y(c)+y'(c)+y''(c))^2)}{4\cdot 6\cdot 5^3} \in (-\pi/2000, 0].$$

Vi har alltså stängt in resttermen i ett intervall av längd $\pi/2000 < 2/1000$. Om vi därför ersätter resttermen med $-1/1000$, kommer vi att vara högst en tusendel från dess verkliga värde. Vi får då uppskattningen

$$y(6/5) \approx y(1)+y'(1)(6/5-1)+\frac{y''(1)(6/5-1)^2}{2}-\frac{1}{1000} = 2+\frac{2}{5}+\frac{2}{50}-\frac{1}{1000} = \frac{2439}{1000}.$$