Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2013-08-27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt C beteckna den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten. Bestäm det reella talet $\alpha > 0$ så att arean av den rotationsyta som bildas då C roterar ett varv kring linjen $y = -\alpha$ blir 4π areaenheter.

2. Finn den lösning till differentialekvationen $y^2 y' - x^2(y^3 + 1) = 0$ som uppfyller $y(0) = 1$.

3. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^4 e^{1/x}\ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) - p(x)\right) = 0.$

4. (a) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+1}\,dx$ är konvergent. (1p)

   (b) För vilka reella x är potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 2^n} x^n$ konvergent? För vilka reella x är den absolutkonvergent? (2p)

5. Bestäm, för varje värde på konstanten $k > 0$, den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 3y = \cos(kx)$.

6. Ange ett reellt tal α sådant att $\displaystyle\alpha < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4} < \alpha + \frac{1}{2}.$

7. Finn alla lösningar till differentialekvationen $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$.

Lycka till!

Lösningsförslag, tentamen i Envariabelanalys 2 2013-08-27

1. Kurvan C kan parametriseras som $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 < t < \pi/2$. Areaelementet blir då $dA = 2\pi(y+\alpha)ds = 2\pi(\sin t+\alpha)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt = 2\pi(\sin t+\alpha)dt$, varför rotationsarean är

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/2} (\sin t + \alpha)dt = 2\pi + \alpha\pi^2$$

som är 4π då $\alpha = 2/\pi$.

2. Under förutsättning att $y \neq -1$ kan vi separera variabler enligt

$$\frac{y^2}{y^3+1}y' = x^2,$$

vilket efter integration med avseende på x ger $\frac{1}{3}\ln|y^3+1| = x^3/3 + C$, ur vilket vi kan lösa ut $y = \sqrt[3]{De^{x^3} - 1}$, där C och D är godtyckliga konstanter. (Noga räknat är $D = \pm e^{3C}$, så $D \neq 0$, men $D = 0$ ger ju lösningen $y = -1$ som vi kastade bort ovan.) Begynnelsevillkoret ger $D = 2$, så svaret är $y(x) = \sqrt[3]{2e^{x^3} - 1}$.

3. Med hjälp av kända Maclaurinutvecklingar för e^t och $\ln(1+t)$ skriver vi

$$\begin{aligned}
&x^4 e^{1/x} \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) - p(x) \\
&= x^4\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{2x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) - p(x) \\
&= x^4\left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right) - p(x) \\
&= 2x^2 + 2x - 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)
\end{aligned}$$

som går mot noll om och endast om $p(x) = 2x^2 + 2x - 1$.

4. (a) Integralen är endast generaliserad i oändligheten. Integranden kan skrivas $\dfrac{x+1}{x^3+1} = \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1+1/x}{1+1/x^3}$, där andra faktorn går mot 1 då $x \to \infty$. Integralen $\displaystyle\int_k^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent om $k > 0$, så andra jämförelsekriteriet visar att ursprungsintegralen också är konvergent.

   (b) Vi använder kvotkriteriet:

$$\left|\frac{(n+1+1)x^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \middle/ \frac{(n+1)x^n}{n^2 2^n}\right| = \frac{n^2(n+2)}{2(n+1)^3}|x| \to \frac{|x|}{2}, \quad n \to \infty,$$

vilket visar att konvergensradien är 2. Om $x = -2$ fås serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2}$ som är alternerande och termernas belopp avtar mot noll, så serien konvergerar enligt Leibniz. Om $x = 2$ får vi istället $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ som är divergent (jämför med harmoniska serien).
Slutsats: Konvergens för $-2 \le x < 2$ och absolutkonvergens för $-2 < x < 2$.

5. Karakteristiska ekvationen blir $r^2+3 = 0$ som har rötterna $\pm\sqrt{3}i$, varför homogena lösningen är $y_h = C_1 \sin(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x)$. För en partikulärlösning betraktar vi hjälpekvationen $u'' + 3u = e^{ikx}$ och gör ansatsen $u_p = z_p(x)e^{ikx}$. Sätts ansatsen in i ekvationen fås $z_p'' + 2ikz_p' + (3-k^2)z_p = 1$. Om $k^2 \neq 3$ kan vi ansätta $z_p = A$ (konstant) som ger $A = 1/(3-k^2)$ och $u_p = e^{ikx}/(3-k^2)$. Om $k^2 = 3$, ansätter vi $z_p = Bx$ och får $B = 1/(2ik) = -i/(2\sqrt{3})$ respektive $u_p = -ixe^{ikx}/(2\sqrt{3})$. Slutligen fås $y_p = \mathrm{Re}(u_p)$, så

$$y = y_h + y_p = \begin{cases} C_1 \sin(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x) + \frac{1}{3-k^2}\cos(kx) \text{ om } k \neq \sqrt{3}, \\ C_1 \sin(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x) + \frac{x}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x) \text{ om } k = \sqrt{3}. \end{cases}$$

6. Funktionen $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ är positiv och strikt avtagande då $x \ge 1$, så med integraluppskattningar kan vi skriva

$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4} < f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Vi har $f(1) = 1/2$, så vi kan låta α anta integralens värde. Med variabelbytet $t = x^2$ beräknar vi

$$\alpha = \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}(\arctan R - \arctan 1) = \frac{\pi}{8}.$$

7. Vi ansätter en potensserie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Innanför konvergensradien kan vi derivera termvis, varpå ekvationen kan skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+3} = 0.$$

Koefficienten framför x^m i VL måste vara noll för varje heltal $m \ge 0$ för att ekvationen ska vara uppfylld. För $m = 0, 1, 2$ är dessa koefficienter i tur och ordning $-c_1$, 0 och $3c_3$, så $c_1 = c_3 = 0$. För $m \ge 3$ ges koefficienten framför x^m av uttrycket $(m+1)(m-1)c_{m+1} + 4c_{m-3}$, så vi får rekursionen $c_{m+1} = -\dfrac{4}{(m+1)(m-1)}c_{m-3}$. Då $c_1 = c_3 = 0$ ger rekursionen att $c_i = 0$ för alla udda i. För att enbart betrakta jämna index är det praktiskt att skriva $d_k = c_{2k}$, varpå rekursionen tar formen

$$d_k = -\frac{4}{2k \cdot 2(k-1)}d_{k-2} = -\frac{1}{k(k-1)}d_{k-2}.$$

Om vi följer denna rekursion till botten kan vi uttrycka d_k i d_0 eller d_1, beroende på om k är jämnt eller udda. Vi får

$$d_k = \begin{cases} (-1)^l \frac{1}{(2l)!} d_0 & \text{om } k = 2l \text{ är jämnt,} \\ (-1)^l \frac{1}{(2l+1)!} d_1 & \text{om } k = 2l+1 \text{ är udda.} \end{cases}$$

Sammanfattningsvis fås alltså lösningarna

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k} \\ &= d_0 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(2l)!} x^{4l} + d_1 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(2l+1)!} x^{4l+2} \\ &= d_0 \cos x^2 + d_1 \sin x^2, \end{aligned}$$

där d_0 och d_1 är godtyckliga konstanter. Vi noterar slutligen att de ingående serierna har konvergensradie ∞, varför våra räkningar är giltiga för alla x.