Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2013-06-05 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Ange en formel för arean av ytan som fås då kurvan $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $x = -2$. (1p)

   (b) Beräkna volymen av den kropp som fås då området $0 \leq y \leq x^4 e^{x^6}$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring y-axeln. (2p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = 2 - 9x^2$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 3$.

3. (a) Avgör om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big)$ är konvergent. (1p)

   (c) Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{3^n}$. (1p)

4. Bestäm den lösning till $y' = (x+1)(y^2+1)$ som uppfyller $y(0) = 1$. Bestäm även lösningens definitionsmängd.

5. Bestäm en approximation till $10^{1/3}$. Approximationen ska vara på formen p/q, där p och q är heltal, och felet ska vara mindre än $1/200$.

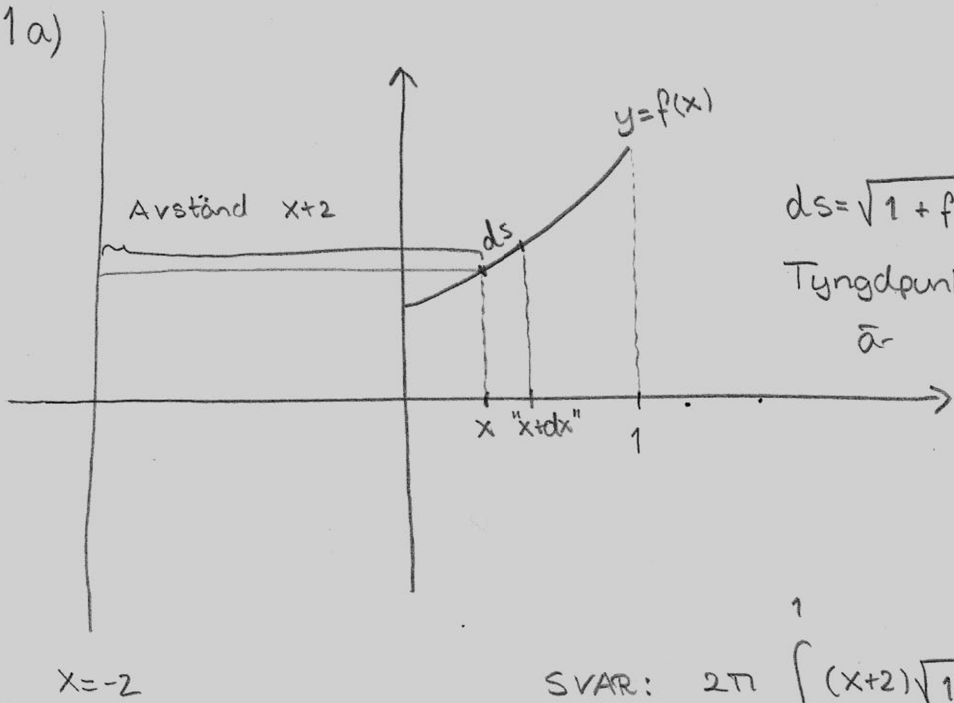
6. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{p\to 0} \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}$, där a och b är positiva konstanter.

7. Antag att f och g är kontinuerligt deriverbara funktioner sådana att $1 \leq f(x) \leq 2$ och $f(x)g(x) = 1$ för alla $x \in [0,1]$. Låt A och B vara areorna av rotationsytorna som fås då kurvorna $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, respektive $y = g(x)$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring y-axeln. Visa att $A \leq 4B$.

Lycka till!

LÖSNINGSSKISS, ENVARIABELANALYS 2, 2013-06-05

1a)

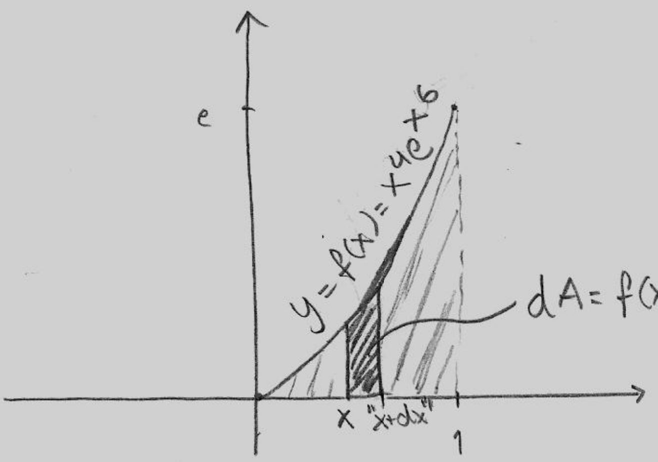


$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Tyngdpunktens väg för ds-elementet är $2\pi(x+2)$

SVAR: $2\pi \int_0^1 (x+2)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$

b)



Tyngdpunktens väg för dA-elementet är $2\pi x$

$$2\pi \int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^4 e^{x^6}\,dx = 2\pi \int_0^1 x^5 e^{x^6}\,dx = 2\pi \left[\frac{e^{x^6}}{6}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{e-1}{6}\right) = \frac{\pi(e-1)}{3}$$

SVAR: $\frac{\pi(e-1)}{3}$.

2) <u>Homogenlösning:</u> $r^2 - 2r - 3 = (r+1)(r-3)$ ger

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} .$$

<u>Partikulärlösning:</u> $y_p = ax^2 + bx + c$ ansätts.

$y'_p = 2ax + b$, $y''_p = 2a$ ger

$$y''_p - 2y'_p - 3y_p = 2a - 2(2ax+b) - 3(ax^2+bx+c) =$$

$$= -3ax^2 + (-4a-3b)x + (2a-2b-3c) = 2-ax^2$$

ger $\begin{cases} -3a = -9 \\ -4a-3b=0 \\ 2a-2b-3c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\frac{4a}{3} = -4 \\ c = \frac{2\cdot 3 - 2\cdot(-4) - 2}{3} = 4 \end{cases}$

Så allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + 3x^2 - 4x + 4$,

$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} + 6x - 4$

$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 4 = 5 \\ y'(0) = -C_1 + 3C_2 - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ -1 + C_2 + 3C_2 - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$

SVAR: $y = -e^{-x} + 2e^{3x} + 3x^2 - 4x + 4$.

3a) $\cos 1/n = 1 - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^4)$. $\cos 1/n \to 1 \neq 0$ då $n \to \infty$

Enligt divergenstestet är därför $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 1/n$ divergent.

SVAR: Divergent.

b)

$1 - \cos 1/n = \frac{1}{2n^2} + O(1/n^4)$. Vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

som är konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos 1/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2n^2 + O(1/n^4)}{1/n^2} = \frac{1}{2} \quad \left(0 < \frac{1}{2} < \infty\right)$$

SVAR: Konvergent,

c)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2x^{n+1}}{3^{n+1}} \Big/ \frac{2x^n}{3^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3} < 1 \iff |x| < 3$$

SVAR: 3.

4)

$$y' = (x+1)(y^2+1) \iff /\text{OBS! } y^2+1 \geq 1 \neq 0/ \iff \frac{1}{y^2+1}\, y' = x+1$$

Detta ger

$$\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \int (x+1)\, dx ,$$

d.v.s.

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$y(0) = 1$ ger nu $\arctan 1 = \pi/4 = C$

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + x + \pi/4\right)$$

Definitionsmängden till tan s är $-\pi/2 < s < \pi/2$ $(-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2)$

så y är definierad på mängden

$$-\pi/2 < \frac{x^2}{2} + x + \pi/4 < \pi/2$$

$$\iff -\frac{3\pi}{4} < \frac{x^2}{2} + x < \pi/4$$

$\frac{x^2}{2} + x > -\frac{3\pi}{4}$ gäller för alla x

$\left(\frac{x^2}{2} + x = -\frac{3\pi}{4}\right.$ har bara komplexa rötter ...)

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{\pi}{4} \iff (x+1)^2 - 1 = \frac{\pi}{2} \iff x = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}$$

Vi ser via test att $\frac{x^2}{2} + x < \frac{\pi}{4}$ håller då

$$-1 - \sqrt{1+\pi/2} < x < -1 + \sqrt{1+\pi/2}$$

SVAR: $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{\pi}{4}\right)$, $-1 - \sqrt{1+\pi/2} < x < -1 + \sqrt{1+\pi/2}$.

5) Vi vill använda Maclaurinutveckling av $f(t) = (1+t)^{1/3}$ med Lagranges restterm.

Till ordning 2 är denna (för $t \geq 0$)

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f^{(3)}(s)}{3!}t^3 \qquad \text{där} \quad 0 \leq s \leq t.$$

$$f(0) = 1, \quad f'(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{-2/3}, \quad f'(0) = \frac{1}{3}.$$

$$f''(t) = -\frac{2}{9}(1+t)^{-5/3}, \quad f''(0) = -\frac{2}{9}, \quad f^{(3)}(t) = \frac{10}{27}(1+t)^{-8/3}$$

Så

$$f(t) = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + \frac{10}{27}\frac{(1+s)^{-8/3}}{3!}t^3 \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Det är dock inte möjligt att få en tillräckligt bra feluppskattning om vi försöker att titta på $f(9) = (1+9)^{1/3}$, utan vi måste bryta ut en faktor.

Vi noterar att $10^{1/3} = (8+2)^{1/3} = \left(8\left(1+\frac{1}{4}\right)\right)^{1/3} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{1/3}$.

Nu gäller

$$2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{1/3} = 2\left(1 + \frac{1/4}{3} - \frac{(1/4)^2}{9} + \frac{5}{81}(1+s)^{-8/3}(1/4)^3\right) \qquad 0 \leq s \leq 1/4$$

$$= 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} + \frac{10}{81}(1+s)^{-8/3}(1/4)^3.$$

För att uppskatta feltermen noterar vi att för $0 \leq s \leq 1/4$ gäller

$$0 \leq \frac{10}{81}(1+s)^{-8/3}(1/4)^3 \leq \frac{10}{81} \cdot \frac{1}{64} < \frac{1}{80} \cdot \frac{5}{32} = \frac{1}{16 \cdot 32} = \frac{1}{512} < \frac{1}{200}$$

Uppskattningen blir $2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} = \frac{144 + 12 - 1}{72} = \frac{155}{72}$

SVAR: $\frac{155}{72}$.

6)

$$\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = \left(\frac{(\sqrt{ab})^p\left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^p + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^p\right)}{2}\right)^{1/p} =$$

$$= \sqrt{ab}\left(\frac{s^p+s^{-p}}{2}\right)^{1/p} \quad \text{där} \quad s = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Nu gäller att för $s>0$

$$\left(\frac{s^p+s^{-p}}{2}\right)^{1/p} = e^{\frac{1}{p}\ln\left(\frac{s^p+s^{-p}}{2}\right)} = e^{\frac{1}{p}\ln\left(\frac{e^{p\ln s}+e^{-p\ln s}}{2}\right)} =$$

$$= \Big/ \begin{array}{l} e^{p\ln s} = 1+p\ln s + O(p^2) \\ e^{-p\ln s} = 1-p\ln s + O(p^2) \end{array} \Big/ = e^{\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1+p\ln s+O(p^2)+1-p\ln s+O(p^2)}{2}\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{p}\ln(1+O(p^2))} = \Big/ \ln(1+t) = O(t) \Big/ = e^{\frac{1}{p}O(p^2)} \to e^0 = 1$$

då $p \to 0$.

Alltså gäller att $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} \to \sqrt{ab}$ då $p \to 0$.

SVAR: $\sqrt{ab}$

7) $f(x)g(x) = 1$ och $1 \leq f(x) \leq 2$ ger att $1/2 \leq g(x) \leq 1$,

$f(x) = \frac{1}{g(x)}$, $f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$.

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+\frac{g'(x)^2}{g(x)^4}}\, dx =$$

$$\leq \Big/ \frac{1}{g(x)^4} \leq \frac{1}{(1/2)^4} = 16 \Big/ \leq 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+16g'(x)^2}\, dx$$

$$\leq 2\pi \int_0^1 x\sqrt{16+16g'(x)^2}\, dx = 4 \cdot 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+g'(x)^2}\, dx = 4B.$$

V.S.B.