Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2013-05-29 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till $y' - 2xy = 4xe^{x^2}$ som uppfyller $y(0) = 2$.

2. (a) Ange en formel för längden av

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ a \leq t \leq b. \qquad \text{(1p)}$$

   (b) Beräkna rotationsarean av den yta som uppkommer då

$$C : \begin{cases} x = 1 + \frac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases}, \ 0 \leq t \leq 2, \qquad \text{(2p)}$$

   roteras ett varv kring x-axeln.

3. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x + 10 \sin x$.

4. Avgör om $f(x) = \cos x \sqrt{1 + x^2}$ har lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

5. (a) Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^3 + 4}$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) \sin \frac{1}{n}$ är konvergent. (2p)

6. Visa att $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ inte är absolutkonvergent.

7. Visa att funktionen $f(x) = xe^x$, $x > -1$, är inverterbar. Låt

$$g(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x f^{-1}(t) dt,$$

   där f^{-1} är inversen till f. Avgör för vilka värden på heltalet n man kan definiera $g(0)$ så att $g(x)$ blir kontinuerlig i $x = 0$. Bestäm även $g(0)$ i dessa fall.

Lycka till!

Lösningsskiss, TATA42, 2013-05-29

1. $(-x^2)' = -2x$, så e^{-x^2} är en integrerande faktor:

   $y' - 2xy = 4xe^{x^2} \Leftrightarrow y'e^{-x^2} - 2xye^{-x^2} = 4xe^{x^2}e^{-x^2} \Leftrightarrow (e^{-x^2}y)' = 4x.$

   Detta ger $e^{-x^2}y = \int 4x\ dx = 2x^2 + C$. Så $y = 2x^2e^{x^2} + Ce^{x^2}$.

   $y(0) = 2$ ger $C = 2$.

   Svar: $y = 2(x^2 + 1)e^{x^2}$.

2. (a) Längden ges av

   $$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.$$

   (b) Rotationsarean ges av

   $$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 y ds = 2\pi \int_0^2 y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt \\ &= 2\pi \int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\ dt \ \Big/ \begin{array}{c} u = t^2 + 1 \\ du = 2t\ dt \end{array} \Big/ = \pi \int_1^5 \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

   Svar: $A = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

3. $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0$ ger homogenlösningar $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

   För att finna en partikulärlösning y_{p1} till $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ ansätter vi $y = ze^x$. Detta ger

   $$z'' - z' = 2x.$$

   Med $z_p = x(Ax + B)$ får vi $z_p = -x(x+2)$ och $y_{p1} = -x(x+2)e^x$.

   För att finna en partikulärlösning y_{p2} till $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$ hittar vi en partikulärlösning u_p till hjälpekvationen $u'' - 3u' + 2u = 10e^{ix}$ och sätter $y_{p2} = \operatorname{Im} u_p$. Med $u = ze^{ix}$ får vi

   $$z'' + (2i - 3)z' + (1 - 3i)z = 10.$$

   Detta ger $z_p = \frac{10}{1-3i} = 1 + 3i$ och $u_p = z_pe^{ix} = (1+3i)(\cos x + i\sin x) = (\cos x - 3\sin x) + i(3\cos x + \sin x)$.

   Alltså $y_{p2} = 3\cos x + \sin x$. (Alternativ metod: ansätt $y_p = A\sin x + B\cos x$ ...)

   Svar: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x(x+2)e^x + 3\cos x + \sin x$.

4. $f(x) = \cos x\ \sqrt{1+x^2} = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6))(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6))$ $= 1 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6) \Rightarrow f(x) - f(0) = -\frac{1}{3}x^4 + O(x^6) < 0$ för alla x som ligger tillräckligt nära 0.

   Svar: $f(x)$ har lokalt maximum i $x = 0$.

5. (a) $a_n = \dfrac{n}{n^3+4} = \dfrac{n}{n^3(1+4/n^3)} = \dfrac{1}{n^2(1+4/n^3)}$.

Vi jämför med $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ som är konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+4}\frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4/n^3} = 1,\ 0 < 1 < \infty.$$

Svar: Konvergent.

(b) $a_n = (1-\cos\frac{1}{n})\sin\frac{1}{n} = \Big/ \begin{array}{l} \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4) \\ \sin t = t + O(t^3) \end{array} \Big/$

$= (1 - 1 + \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4}))(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^3})) = \frac{1}{2n^3} + O(\frac{1}{n^5}) = \frac{1}{n^3}(\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2}))$.

Vi jämför $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ med $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ som är konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\cos\frac{1}{n})\sin\frac{1}{n}}{1/n^3} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2},\ 0 < \frac{1}{2} < \infty.$$

Svar: Konvergent

6. Vi visar att $\int\limits_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ är divergent.

$$\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx = \int_1^{\pi/2} \frac{|\cos x|}{x} dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{2k+1}{2}\pi}^{\frac{2k+3}{2}\pi} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{2}{3}\pi+\pi k}^{\frac{4}{3}\pi+\pi k} \frac{|\cos x|}{x} dx.$$

Eftersom $|\cos x| \geq \frac{1}{2}$ för $x \in \left[\frac{2}{3}\pi + \pi k, \frac{4}{3}\pi + \pi k\right]$, $k = 0, 1, 2, ...$får vi

$\frac{|\cos x|}{x} \geq \frac{1/2}{x} \geq \frac{1/2}{\frac{4}{3}\pi + \pi k}$ för $x \in \left[\frac{2}{3}\pi + \pi k, \frac{4}{3}\pi + \pi k\right]$, $k = 0, 1, 2, ...$och

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{2}{3}\pi+\pi k}^{\frac{4}{3}\pi+\pi k} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/2}{\frac{4}{3}\pi + \pi k} \frac{2\pi}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4+3k}.$$

Serien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4+3k}$ är divergent (ty $\frac{1}{4+3k} = \frac{1}{k}\frac{1}{4/k+3}$, $\frac{1}{4/k+3} \to \frac{1}{3}$, $0 < \frac{1}{3} < \infty$ och $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent). Alltså, är även integralen $\int\limits_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ divergent.

7. $f(x) = xe^x$, $x > -1$, är kontinuerlig och strängt växande ($f'(x) = (1+x)e^x > 0$, $x > -1$) $\Rightarrow$ inverterbar och $f^{-1} : \left]-\frac{1}{e}, \infty\right[\longrightarrow \left]-1, \infty\right[$ är kontinuerlig.

För att visa att $f^{-1}(x)$ har Maclaurinutvecklingen av ordning 1 med resttermen i ordoform behöver vi visa att f^{-1} har kontinuerliga derivator t o m ordning 2:

$f : \left]-1, \infty\right[\longrightarrow \left]-\frac{1}{e}, \infty\right[$ är inverterbar, deriverbar och $f'(x) > 0$, $x > -1 \Rightarrow$ f^{-1} är deriverbar i $\left]-\frac{1}{e}, \infty\right[$ och

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Enligt kedjeregeln är $(f^{-1})'$ deriverbar, ty f', f^{-1} är deriverbara och $f' \neq 0$. Dessutom

$$\left(f^{-1}\right)'' = \left(\left(f^{-1}\right)'\right)' = -\frac{1}{(f'(f^{-1}(x)))^2} f''(f^{-1}(x))\ (f^{-1}(x))' = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}$$

är kontinuerlig som sammansättning av kontinuerliga funktioner. Så har f^{-1} kontinuerliga derivator t o m ordning 2.

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$, $\left(f^{-1}\right)'(0) = 1$ och $f^{-1}(x) = x + O(x^2)$. Detta ger

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x^n} \int_0^x f^{-1}(t)dt = \frac{1}{x^n} \int_0^x (t + O(t^2))\ dt \\ &= \frac{1}{x^n} \left[\frac{t^2}{2} + O(t^3)\right]_0^x = \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^n} \end{aligned}$$

Gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^n}$$

existerar ändligt om heltal $n \leq 2$. Funktionen $g(x)$ blir kontinuerlig om $n \leq 2$ och

$$g(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^n} = \begin{cases} 0, \text{ om } n < 2, \\ \frac{1}{2}, \text{ om } n = 2. \end{cases}$$