Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2013-03-16 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till $y' + (\sin x)y = (\sin x)e^{2\cos x}$ som uppfyller $y(0) = 0$.

2. Antag att $f(x) \geq -2$ då $0 \leq x \leq 1$.
   (a) Ange en formel för arean av ytan som fås då kurvan $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)
   (b) Ange en formel för volymen av kroppen som fås då området $-2 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)
   (c) Beräkna volymen i fallet $f(x) = x^3$. (1p)

3. Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(ax)} - 1 - 2x}{\ln(1 + x^2)}$ existerar ändligt, samt beräkna gränsvärdet för detta a.

4. (a) Avgör om $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4 + 3x + 2}\,dx$ är konvergent. (1p)
   (b) Avgör för vilka reella tal x som $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{2n^2}$ är konvergent. (2p)

5. Bestäm den allmänna lösningen till $y''' - y'' + y' - y = \cos x$.

6. Approximera arean av ytan som fås då kurvan $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1/3$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. Approximationen ska vara på formen $p\pi/q$, där p och q är heltal, och felet ska vara mindre än $1/500$.

7. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\binom{1/3}{n}$ är konvergent.

Lycka till!

Lösningsskiss, Tata42, 2013-03-16

1) $(-\cos x)' = \sin x$, så $e^{-\cos x}$ är en integrerande faktor:

$$(e^{-\cos x}y)' = e^{-\cos x}y' + \sin x\, e^{-\cos x}y = e^{-\cos x}(y' + \sin x\, y) =$$

$$= e^{-\cos x}(\sin x\, e^{2\cos x}) = \sin x\, e^{\cos x}.$$

Detta ger

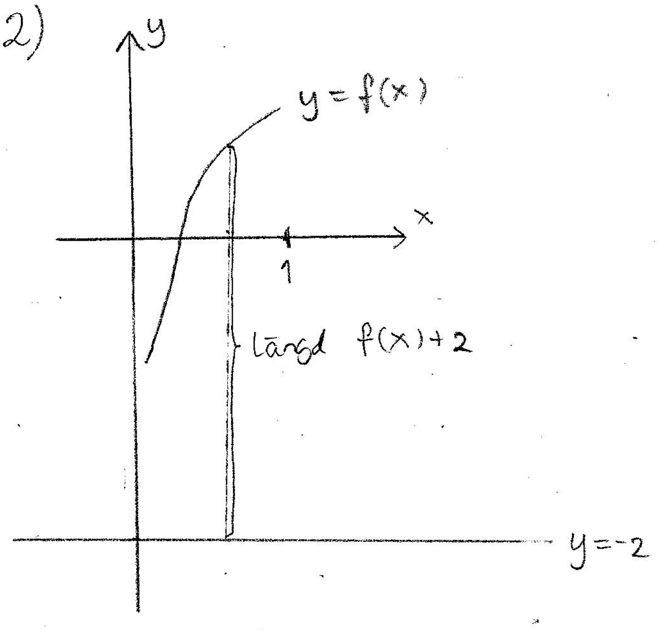
$$e^{-\cos x}y = \int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -e^{\cos x} + C.$$

Så $y = Ce^{\cos x} - e^{2\cos x}$. $y(0) = Ce - e^2$ ger $C = e$.

<u>SVAR</u>: $y = e\cdot e^{\cos x} - e^{2\cos x}$

---

2)



a) Arean ges av

$$\int_0^1 2\pi(f(x)+2)\,ds = \int_0^1 2\pi(f(x)+2)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

b) Volymen ges av

$$\int_0^1 \pi\,(f(x)+2)^2\,dx.$$

c) $$\int_0^1 \pi(x^3+2)^2dx = \pi\int_0^1 (x^6+4x^3+4)\,dx = \pi\left[\frac{x^7}{7}+x^4+4x\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{36\pi}{7}}}.$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(ax)} - 1 - 2x}{\ln(1+x^2)} = \left/ \begin{array}{l} e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) \\ \ln(1+s) = s + O(s^2) \end{array} \right/ =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin(ax) + \frac{\sin^2(ax)}{2} + O(\sin^3(ax)) - 1 - 2x}{x^2 + O(x^4)} =$$

$$= \left/ \sin r = r + O(r^3) \right/ = \lim_{x\to 0} \frac{1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + O(x^3) - 1 - 2x}{x^2 + O(x^4)} =$$

= / För att gränsvärdet ska existera måste $a = 2$ / =

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x^2}{2} + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + O(x)}{1 + O(x^2)} = 2.$$

<u>SVAR:</u> $a = 2$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1 - 2x}{\ln(1+x^2)} = 2$.

---

4) a) Vi jämför med $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ som är konvergent.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/(x^4 + 3x + 2)}{1/x^4} = 1 \quad (0 < 1 < \infty).$$

SVAR: Konvergent.

b) $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/2(n+1)^2}{x^n/2n^2} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| < 1$$

$\Leftrightarrow$ $-1 < x < 1$.

$x = \pm 1$ ger $\left|\frac{x^n}{2n^2}\right| = \frac{1}{2n^2}$ så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2}$ är absolutkonvergent för dessa x.

<u>SVAR:</u> $-1 \leq x \leq 1$.

5) $r^3 - r^2 + r - 1 = (r-1)(r^2+1) = (r-1)(r+i)(r-i)$ ger homogenlösningar

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x .$$

Vi hittar nu <u>en partikulärlösning</u> z till hjälpekvationen

$z''' - z'' + z' - z = p(D)z = e^{ix}$ och sätter $y_p = \operatorname{Re} z$ $(\cos x = \operatorname{Re} e^{ix})$.

Med $z = we^{ix}$ får vi

$$p(D)z = p(D)(we^{ix}) = e^{ix} p(D+i)w = e^{ix}(D-1+i)(D+2i)Dw =$$

$$= \dots = e^{ix}(D^3 + (-1+3i)D^2 + (-2-2i)D)w = e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow \quad w''' + (-1+3i)w'' + (-2-2i)w' = 1 \quad \Leftarrow \quad w' = \frac{1}{(-2-2i)} = \frac{-1+i}{4}$$

$$\Leftarrow \quad w = \frac{-1+i}{4} x .$$

Detta ger $z = \frac{-1+i}{4} x e^{ix} = \frac{x}{4}((-\cos x - \sin x) + i(\cos x - \sin x))$,

$y_p = \operatorname{Re} z = \frac{x}{4}(-\cos x - \sin x)$

<u>SVAR:</u> $y = C_1 e^x + (C_2 - \frac{x}{4})\cos x + (C_3 - \frac{x}{4})\sin x .$

(Alternativ metod : ansätt $y_p = x(a\cos x + b\sin x) \dots$)

6) $$2\pi\int_0^{1/3}(x^3+2)\sqrt{1+9x^4}\,dx$$ ska approximeras.

Med $f(t)=\sqrt{1+t}=(1+t)^{1/2}$ gäller för $t>0$ att

$$f(t)=1+\frac{t}{2}+\frac{f''(s)}{2}t^2 \quad \text{för något } 0<s<t,$$

$$f''(s)=-\frac{1}{4}(1+s)^{-3/2}.$$

Så

$$(x^3+2)\sqrt{1+9x^4}=(x^3+2)\left(1+\frac{9x^4}{2}+\frac{f''(s)}{2}81x^8\right) \quad (0<s<9x^4)$$

$$=2+x^3+9x^4+\underbrace{\left(\frac{9x^7}{2}+(x^3+2)\frac{f''(s)}{2}81x^8\right)}_{r(x).}$$

För $0\le x\le 1/3$ gäller nu, då $|f''(s)|\le\frac{1}{4}$ och $0\le x^3\le\frac{1}{3^3}\le\frac{1}{3}$

$$|r(x)|\le\frac{9x^7}{2}+\left(\frac{1}{3}+2\right)\frac{1}{8}81x^8=\frac{9x^7}{2}+\frac{7}{8}27x^8$$

$$\left|2\pi\int_0^{1/3}r(x)\,dx\right|\le 2\pi\int_0^{1/3}|r(x)|\,dx\le 2\pi\int_0^{1/3}\left(\frac{9x^7}{2}+\frac{7}{8}27x^8\right)dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{9x^8}{16}+\frac{7\cdot 3^3x^9}{8\cdot 3^2}\right]_0^{1/3}=\frac{23\pi}{8\cdot 3^8}\le /\pi\le 4/\le\frac{23}{2\cdot 3^8}<\frac{24}{2\cdot 3^8}$$

$$=\frac{4}{3^7}<\frac{1}{500}.$$

$$2\pi\int_0^{1/3}(2+x^3+9x^4)\,dx=2\pi\left[2x+\frac{x^4}{4}+\frac{9x^5}{5}\right]_0^{1/3}=2\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\frac{9}{5\cdot 3^5}\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\frac{1}{5\cdot 3^3}\right)=2\pi\left(\frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3^3+5+3\cdot 4}{5\cdot 4\cdot 3^4}\right)=\frac{1097}{810}\pi,$$

och $$\frac{1097}{810}\pi-\frac{1}{500}<2\pi\int_0^{1/3}(x^3+2)\sqrt{1+9x^4}\,dx<\frac{1097}{810}\pi+\frac{1}{500}.$$

SVAR: $\frac{1097}{810}\pi$ (T.ex.)

7) $$(-1)^{n-1}\binom{1/3}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-1-1/3\right)}{n!} =$$

$$= \frac{1}{3n}\left(\frac{1-1/3}{1}\right)\cdot\left(\frac{2-1/3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1-1/3}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3n}\exp\left(\ln\left(\left(1-1/3\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{3(n-1)}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3n}\exp\left(\ln\left(1-1/3\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{3(n-1)}\right)\right)$$

$\leq$ / $\ln(1+t) \leq t$ om $-1 < t \leq 0$ ty $\ln 1 = 0$ och $(t-\ln(1+t))' = 1-\frac{1}{1+t} \leq 0$ då $-1 < t \leq 0$ /

$$\leq \frac{1}{3n}\exp\left(-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{3(n-1)}\right) \leq$$

$\leq$ / $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) \leq -\frac{\ln n}{3}$, ty $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$ /

$$\leq \frac{1}{3n}\exp\left(-\frac{1}{3}\ln n\right) = \frac{1}{3n}\exp(\ln(n^{-1/3})) =$$

$$= \frac{1}{3n^{1+1/3}}$$

Så $$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\binom{1/3}{n} \leq \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/3}} < \infty$$

SVAR: Konvergent.