Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2013-01-07 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till $y' + \dfrac{1}{x}y = 4x^2$, där $x > 0$, som uppfyller $y(1) = 0$.

2. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området $0 \leq y \leq e^{(x-2)^2}$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $x = 2$.

3. Bestäm konstanterna a och b så att $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) - 1 + a^2x^2/2}{\ln(1+bx^2) - 4x^2} = -\frac{1}{12}$.

4. Bestäm alla lösningar till $y'' + 10y' + 25y = (30x^4 + 12x^2)e^{-5x}$.

5. Avgör om följande serier är konvergenta:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\sqrt{n})}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos(e^{-n}) - 1\big)$.

6. Bestäm den lösning till $y'' + 4x^2y = 2\cos x^2$ som uppfyller $y(0) = y'(0) = 0$ och uttryck lösningen med hjälp av elementära funktioner.

7. Antag att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är oändligt deriverbar, att $f(x) = 0$ då $x \leq 0$ och att $f^{(n)}(x) \geq 0$ då $x > 0$ och $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Visa att $f(x) = 0$ för alla $x > 0$.

Lycka till!

Lösningsskiss, TATA42, 2013-01-07

1) Eftersom $(\ln x)' = 1/x$ är $e^{\ln x} = x$ en integrerande faktor:

$$x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = xy' + y = (xy)' = x \cdot 4x^2 = 4x^3$$

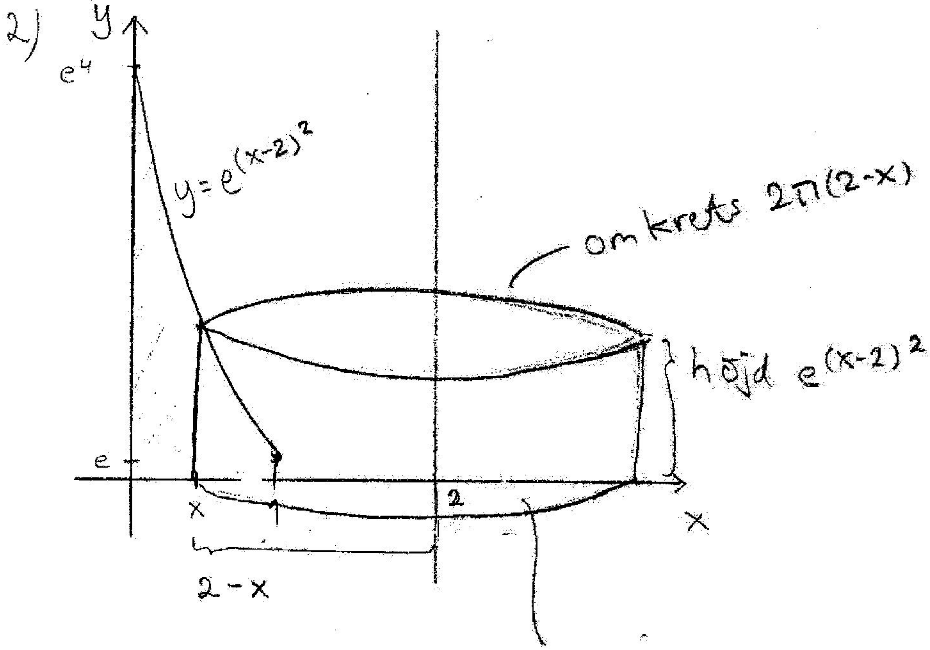
$$\Leftrightarrow \quad xy = x^4 + C \quad \Leftrightarrow \quad y = x^3 + C/x.$$

$y(1) = 1 + C/1 = 0$ ger $C = -1$

SVAR: $y = x^3 - 1/x$.

---

2)



Cylinderns area $= 2\pi(2-x)e^{(x-2)^2}$

$$\text{Volym} = \int_0^1 2\pi(2-x)e^{(x-2)^2}\,dx = \left[-\pi e^{(x-2)^2}\right]_0^1 = \pi(e^4 - e)$$

SVAR: $\pi(e^4 - e)$

3) $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^6)$, $\ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + O(s^3)$

ger med $t = ax$, $s = bx^2$:

$$\frac{\cos(ax) - 1 + a^2x^2/2}{\ln(1+bx^2) - 4x^2} = \frac{1 - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4x^4}{24} + O(x^6) - 1 + \frac{a^2x^2}{2}}{bx^2 - \frac{b^2x^4}{2} + O(x^6) - 4x^2} =$$

$$= \frac{\frac{a^4x^4}{24} + O(x^6)}{(b-4)x^2 - \frac{b^2x^4}{2} + O(x^6)}$$

För att gränsvärdet ska bli $\neq 0$ måste $b = 4$, vilket ger oss

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^4x^4}{24} + O(x^6)}{-8x^4 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{a^4}{192} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = -\frac{a^4}{192} = \frac{-1}{12}$$

så $a^4 = 16$, vilket ger oss (de reella rötterna)

$a = \pm 2$

SVAR: $a = 2$ (eller -2), $b = 4$.

---

4) $r^2 + 10r + 25 = (r+5)^2 = 0 \iff r = -5$, så den allmänna homogenlösningen är

$$y_h = (Ax + B)e^{-5x}$$

Med $y = ze^{-5x}$ insatt i ekvationen får vi

$$y'' + 10y' + 25y = (D+5)^2(ze^{-5x}) = /\text{förskjutningsregeln}/ = e^{-5x}(D+5-5)^2 z = e^{-5x}z'' =$$

$= (30x^4 + 12x^2)e^{-5x}$. Så vi vill ha ett z s.a. $z'' = 30x^4 + 12x^2$

$\Leftarrow z' = 6x^5 + 4x^3 \Leftarrow z = x^6 + x^4$, så en partikulärlösning är

$$y_p = (x^6 + x^4)e^{-5x}$$

<u>SVAR</u>: $y = (Ax + B + x^6 + x^4)e^{-5x}$.

5) a) Serien är <u>alternerande</u>, och eftersom $0 < 1/n \leq 1$ för $1 \leq n < \infty$, så vet vi att $\sin(1/n)$ <u>avtar mot 0</u> då $n \to \infty$, alltså är serien konvergent enligt Leibniz kriterium

SVAR: Konvergent.

b)

$$0 \leq \frac{1}{n(1+\sqrt{n})} = \frac{1}{n+n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent följer det från jämförelseprincipen att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\sqrt{n})}$ är konvergent

SVAR: Konvergent.

c) $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$ ger $\cos(e^{-n}) - 1 = -\frac{e^{-2n}}{2} + O(e^{-4n})$

Alltså gäller (t.ex.):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(e^{-n}) - 1}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(-e^{-2n}/2 + O(e^{-4n})\right) = 0$$

Så det finns speciellt N sådant att

$$|\cos(e^{-n}) - 1| \leq 1/n^2 \quad \text{för alla } n \geq N.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ är konvergent så följer det att $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(e^{-n}) - 1)$ är absolutkonvergent, och därför konvergent.

SVAR: Konvergent.

6) Om $y(x)$ är lösningen till problemet och vi sätter in $w(x) = y(-x)$ i ekvationen så ser vi att w också löser problemet. D.v.s $y = w$, så y är en jämn funktion. Alltså kan vi skriva y på formen $y(x) = z(x^2)$.

Detta ger $y'(x) = 2x z'(x^2)$, $y''(x) = 4x^2 z''(x^2) + 2z'(x^2)$.

Med $t = x^2$ får vi då ekvationen

$$4tz'' + 2z' + 4tz = 2\cos t \Leftrightarrow 2tz'' + z' + 2tz = \cos t.$$

Om z löser denna ekvation och vi sätter in $w(t) = -z(-t)$ så ser vi att $z = w$. d.v.s. z är en udda funktion.

Vi ansätter nu

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n+1}.$$

Observera att $y(x) = z(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{4n+2}$ automatiskt uppfyller $y(0) = y'(0) = 0$.

Vi får nu

$$z' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2n+1)t^{2n}, \quad z'' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(2n+1)(2n)t^{2n-1}$$

och med

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} \quad \text{får vi:}$$

$$2tz'' + z' + 2tz = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n(2n+1)(2n)t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(2n+1)t^{2n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^{2n+2} = \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1} t^{2n} \Big/ =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2c_n(2n+1)(2n) + c_n(2n+1) + 2c_{n-1}\right) t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}.$$

Alltså får vi

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ (4n+1)(2n+1)C_n + 2C_{n-1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \dfrac{(-1)^n/(2n)! - 2C_{n-1}}{(4n+1)(2n+1)} \end{cases}$$

Så $\quad C_1 = \dfrac{\frac{-1}{2} - 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{-1}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1}{3!}, \qquad C_2 = \dfrac{1/4! + 2/3!}{9 \cdot 5} =$

$$= \frac{9}{9 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{1}{5!}$$

Vi "gissar" att $\quad C_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Vi får då

$$(4n+1)(2n+1)C_n + 2C_{n-1} = (4n+1)(2n+1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= (-1)^n\left(\frac{(4n+1)}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-1)!}\right) = (-1)^n\left(\frac{(4n+1)}{(2n)!} - \frac{4n}{(2n)!}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Så gissningen var korrekt.

Alltså gäller

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t, \text{ så}$$

$$y(x) = z(x^2) = \sin(x^2).$$

(Kontroll: $y(x) = \sin(x^2)$ ger $y'(x) = 2x\cos(x^2)$, $y''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$, så $y'' + 4x^2 y = 2\cos(x^2)$, så lösningen stämmer.)

<u>SVAR:</u> $y(x) = \sin(x^2)$.

7) Eftersom $f(x)$ är växande (då $f' \geq 0$), om vi visar att $f(1/4) = 0$, då gäller att $f(t) = 0$ för $t \leq 1/4$, och vi ser att funktionen $f(x-1/4)$ också uppfyller antagandena, så det följer att $f(x) = 0$ för alla x.

Eftersom $f(0) = f'(1) = f''(0) = \ldots = 0$ får vi genom succesiv partiell integration (som i integraluppskattningen av resttermen i Taylorutvecklingen) att för $0 \leq x \leq 1$ gäller

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \Big[-f'(t)(x-t)\Big]_0^x + \int_0^x f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= \int_0^x f''(t)(x-t)\,dt = \left[-\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2\right]_0^x + \int_0^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt =$$

$$= \int_0^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt = \ldots = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Så

$$f(1) = \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n\,dt \geq \int_{1/4}^1 \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n\,dt \geq$$

$$\geq \text{/eftersom } f^{(n+2)} \geq 0 \text{ är } f^{(n+1)} \text{ växande/} \geq f^{(n+1)}(1/4)\int_{1/4}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt =$$

$$= \frac{3^{n+1} f^{(n+1)}(1/4)}{4^{n+1}(n+1)!}$$

Så

$$0 \leq f(1/4) = \int_0^{1/4} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(\frac{1}{4}-t\right)dt \leq f^{(n+1)}(1/4)\int_0^{1/4} \frac{\left(\frac{1}{4}-t\right)^n}{n!}\,dt =$$

$$\frac{f^{(n+1)}(1/4)}{4^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{4^{n+1}(n+1)!\,f(1)/3^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} = \frac{f(1)}{3^{n+1}} \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Så $f(1/4) = 0$. V.S.B