Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2012-08-21 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y' = y^2$ som uppfyller villkoret $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\dfrac{1}{\pi}$.

2. Låt C vara funktionskurvan $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$.

   (a) Teckna den integral som ger längden av C. Du behöver inte räkna ut den. (1p)

   (b) Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då C roteras ett varv kring linjen $x = -2$. (2p)

3. Bestäm konstanterna a och b sådana att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax+bx^2)-x}{x^2 \sin x}$ existerar ändligt samt beräkna gränsvärdet.

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^{-x} + 2$.

5. Avgör om följande serier är konvergenta:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ (1p) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$ (1p) c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$ (1p).

6. Avgör om $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x}\,dx$ är konvergent.

7. Finn på potensserieform alla lösningar $y(x)$ till
$$\int_0^x y(t)dt - y(x) + xy'(x) = x - 1.$$
   Vilka konvergensradier har dessa serier?

Lycka till!

Lösningsskis, TATA42, 2012-08-21

1. För $y \neq 0$ fås $(1+x^2)y' = y^2 \iff \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$. Av detta följer $-\frac{1}{y} = \arctan x + C$ d v s den allmänna lösningen blir $y = -\frac{1}{\arctan x + C}$. Villkoret säger nu $-\frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+C}$ vilket ger $C = \frac{\pi}{2}$.

   (OBS! $y = 0$ är en lösning till differentialekvationen som är ej aktuell p.g.a. villkoret.)

   Svar: $y = -\frac{1}{\arctan x + \frac{\pi}{2}}$.

2. (a) $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+x}dx$. Sökt längd $L = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx$.

   (b) $dA = \underbrace{2\pi(x+2)}_{\text{T.P. väg}} ds = 2\pi(x+2)\sqrt{1+x}dx$. Alltså $A = 2\pi \int_0^1 (x+2)\sqrt{1+x}dx \Big/ \begin{array}{c} x+1=t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \Big/ =$

   $2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (t^2+1)\ t\ 2t\ dt = \frac{8}{15}\pi(11\sqrt{2}-4)$.

   Svar: (a) $L = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx$. (b) $A = \frac{8}{15}\pi(11\sqrt{2}-4)$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax+bx^2)-x}{x^2 \sin x} = \Big/ \begin{array}{l} \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4) \\ \sin x = x + O(x^3) \end{array} \Big/$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(ax+bx^2) - \frac{(ax+bx^2)^2}{2} + \frac{(ax+bx^2)^3}{3} + O(x^4) - x}{x^3 + O(x^5)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a-1)x + (b-\frac{a^2}{2})x^2 + (-ab+\frac{a^3}{3})x^3 + O(x^4)}{x^3+O(x^5)}$$

är ändligt då $\begin{cases} a-1=0 \\ b-\frac{a^2}{2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$. I så fall

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+\frac{x^2}{2})-x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^4)}{x^3+O(x^5)} = -\frac{1}{6}.$$

Svar: $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+\frac{x^2}{2})-x}{x^2 \sin x} = -\frac{1}{6}$.

4. Homogenlösning: karakteristiska ekvationen blir $r^2-2r+1=0$ som har dubbelrot 1, varför homogena lösningen är $y_h = (C_1x+C_2)e^x$.

   a) Partikulärlösning till $y''-2y'+y=e^{-x}$: ansatsen $y_{p1} = Ae^{-x}$ ger $y_{p1} = \frac{1}{4}e^{-x}$.

   b) Partikulärlösning till $y''-2y'+y=2$: ansatsen $y_{p2} = B$ ger $y_{p2} = 2$.

   Svar: $y = (C_1x+C_2)e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + 2$.

5.

   (a) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ är alternerande. Den är konvergent enligt Leibniz' kriterium ty $\frac{\ln n}{n}$ är avtagande $((\frac{\ln x}{x})' = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ då $x > e)$ och går mot 0. Alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

   (b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n}) > 0$ och $\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{n\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^2\sqrt{n}})}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1 + O(\frac{1}{n}) \to 1$ då $n \to \infty$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ är konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ är konvergent enligt jämförelsekriteriet 2.

(c) $\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} > 0$ och $\frac{\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)} \cdot \frac{n}{1} = \frac{\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{2}$ då $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$ är divergent enligt jämförelsekriteriet 2.

6. $\int_e^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx = /P.I./ = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{\sin x}{\ln x}\right]_e^R + \int_e^{\infty} \frac{\sin x}{x(\ln x)^2} dx = \Big/ \begin{matrix} t = \ln x,\ x = e^t \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \Big/ = -\sin e + \int_1^{\infty} \frac{\sin e^t}{t^2} dt.$

$0 \leq \left|\frac{\sin e^t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ och $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ är konvergent $\overset{Jmf.kr\ 1}{\Longrightarrow} \int_1^{\infty} \frac{\sin e^t}{t^2} dt$ är absolutkonvergent $\Longrightarrow \int_e^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$ är konvergent.

Svar: $\int_e^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$ är konvergent.

7. Ansats: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. För $|x| < R$ gäller

$VL = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n = -c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{n-1}}{n} + (n-1)c_n\right] x^n.$

$[x^n]\, VL = [x^n]\, HL \Longleftrightarrow \begin{cases} -c_0 = -1 & (n=0) \\ c_0 = 1 & (n=1) \\ c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(n-1)} & (n \geq 2) \end{cases}$

Rekursionen ger $c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(n-1)} = \frac{c_{n-2}}{n(n-1)^2(n-2)} = ... = \frac{(-1)^{n-1}c_1}{n!(n-1)!}$ för $n \geq 2$. Alltså,

$y(x) = 1 + c_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!(n-1)!} x^n.$

Vi använder kvotkriteriet: $\frac{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!n!} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n!(n-1)!} x^n\right|} = \frac{|x|}{n(n+1)} \to 0$, $n \to \infty$, så konvergensradier är $R = \infty$.

Svar: $y(x) = 1 + c_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!(n-1)!} x^n$, $R = \infty$.