Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2012-06-02 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x$.

2. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x \sin x}$. (1p)

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + x^2} - x^2 \arctan \frac{1}{x}\right)$. (2p)

3. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le x^2$, $0 \le x \le 1$ roterar ett varv kring linjen $x = 3$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 3y' = e^x$ som uppfyller villkoren $y(0) = -1/2$ och $y'(0) = 1/2$.

5. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \arctan k}{k^2 + k}$ är konvergent. (1p)

   (b) För vilka värden på x är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k + \ln k}$ konvergent? (2p)

6. Avgör om $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}\right) \arctan x \, dx$ är konvergent.

7. Definiera en oändlig talföljd $c_0, c_1, c_2, \ldots$ genom att låta $c_0 = c_1 = 1$ och, för $n \ge 2$, $c_n = (c_{n-1} + c_{n-2})/n$. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergerar för alla x; det behöver du inte bevisa. Låt $f(x)$ vara dess summa. Uttryck $f(x)$ med hjälp av elementära funktioner.

Lycka till!

Lösningsförslag, tentamen i Envariabelanalys 2 2012-06-02

1. Efter multiplikation med den integrerande faktorn e^{x^2} kan ekvationen skrivas $\left(e^{x^2}y\right)' = \sin x$, varför $y = e^{-x^2}(C - \cos x)$, där C är en godtycklig konstant.

2. (a) Maclaurinutvecklar man täljare och nämnare kan gränsvärdet skrivas
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + O(x^4) - (1 - (2x)^2/2 + O(x^4))}{x(x + O(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = 3.$$
(b) Med variabelbytet $t = 1/x$ kan gränsvärdet skrivas
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{1+t} - \arctan t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t(1 + t/2 + O(t^2)) - (t + O(t^3))}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

3. Den remsa av området som ligger mellan x-koordinaterna x och $x+dx$ ger bidraget $dV = 2\pi(3 - x)x^2 dx$ till volymen. Summerar vi alla dessa bidrag får vi hela volymen: $V = \displaystyle\int_0^1 2\pi(3 - x)x^2\, dx = \frac{3\pi}{2}$ volymenheter.

4. Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - 3r = 0$ som har rötterna 0 och 3, varför homogena lösningen är $y_h = C_1 + C_2e^{3x}$. För en partikulärlösning gör vi ansatsen $y_p = Ae^x$. Sätts ansatsen in i ekvationen fås $A = -1/2$, så allmänna lösningen blir $y = C_1 + C_2e^{3x} - e^x/2$. Villkoren säger nu $C_1 + C_2 - 1/2 = -1/2$ respektive $3C_2 - 1/2 = 1/2$ vilket ger $C_1 = -C_2 = -1/3$ och således $y = (e^{3x} - 1)/3 - e^x/2$.

5. (a) Serien har positiva termer. Vi använder andra jämförelsekriteriet och noterar $\dfrac{k + \arctan k}{k^2 + k} \Big/ \dfrac{1}{k} = \dfrac{1 + (\arctan k)/k}{1 + 1/k} \to 1\,,\ k \to \infty$. Eftersom serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent följer det att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \arctan k}{k^2 + k}$ också är divergent.

(b) Vi använder kvotkriteriet:
$$\left| \frac{x^{k+1}}{k + 1 + \ln(k + 1)} \Big/ \frac{x^k}{k + \ln k} \right| = \left| x\frac{1 + (\ln k)/k}{1 + 1/k + \ln(k + 1)/k} \right| \to |x|,\ k \to \infty,$$
så seriens konvergensradie är $R = 1$. Då $x = 1$ får vi serien $\sum \frac{1}{k+\ln k}$ som är divergent (jämför t.ex. med harmoniska serien). Med $x = -1$ fås $\sum \frac{(-1)^k}{k+\ln k}$ som är en alternerande serie där termernas belopp avtar och går mot noll då $k \to \infty$. Leibnitz säger därför att serien är konvergent. Slutsats: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k + \ln k}$ är konvergent om och endast om $-1 \le x < 1$.

6. Integralen kan i förstone tyckas generaliserad i 0, men notera att

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)\arctan x = 1,$$

så integranden är begränsad på hela integrationsområdet och integralen är bara generaliserad i ∞. Vi applicerar andra jämförelsekriteriet:

$$\frac{\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)\arctan x}{\frac{1}{x^3}} = x^3\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)\right)\arctan x \to \frac{\pi}{12},\ \ x\to\infty.$$

Eftersom $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ är konvergent, så är även ursprungsintegralen konvergent.

7. Om vi utnyttjar rekursionen kan serien skrivas

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(c_{n-1}+c_{n-2})\frac{x^n}{n}.$$

Innanför konvergensradien, d.v.s. överallt, kan vi derivera termvis. Om vi sedan delar upp serien i två delar fås

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n-1} = 1 + f(x) - 1 + xf(x) = (1+x)f(x).$$

Eftersom $c_0 = 1$ följer det att $f(x)$ är den lösning till differentialekvationen $f'(x) = (1+x)f(x)$ som uppfyller $f(0) = 1$. Denna lösning är $f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.