Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2012-05-24 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till $xy' = (1+x)e^{-y}$, där $x > 1$, som uppfyller $y(e) = 1$.

2. (a) Bestäm maclaurinutvecklingen för $f(x) = 12e^{x-x^3} - (6-x^2)\sin(2x+x^2)$ av ordning 4, med resttermen på ordoform. (2p)

   (b) Avgör om f har lokalt extremvärde i $x = 0$, och i så fall om det är ett lokalt maximum eller ett lokalt minimum. (1p)

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y^{(4)} + 3y'' = x$.

4. Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då parameterkurvan $x = 1-t$, $y = 2t - t^2$, där $0 \le t \le 1$, roteras ett varv kring y-axeln.

5. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + n^7}$ är konvergent. (1p)

   (b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(n\pi + \frac{1}{n}\Big)$ är konvergent. (1p)

   (c) Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$. (1p)

6. Låt $f(x) = \sum_{n=4}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} x^n$.

   (a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien som definierar f konvergent? (2p)

   (b) Visa att $f'(1/e) \le 4e^{-4}$. (1p)

7. Låt $f, g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ och antag att $g(0) = 0$ och $g'(0) \neq 0$. Visa att det finns entydigt bestämda tal $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sådana att då x är nära 0 gäller att

$$f(x) = c_0 + c_1 g(x) + c_2 g(x)^2 + \cdots + c_n g(x)^n + b(x) g(x)^{n+1}$$

   med en funktion b som är begränsad nära 0.

Lycka till!

Lösningsskiss, Tata 42, 2012-05-24

1) $xy' = (1+x)e^{-y}$, $x>1$ $\Leftrightarrow$ $e^{y}y' = 1+\frac{1}{x}$, $x>1$

$\Leftrightarrow$ $\int e^{y}dy = \int (1+\frac{1}{x})dx$, $x>1$ $\Leftrightarrow$ $e^{y} = x + \ln x + c$, $x>1$.

$y(e)=1$ ger nu $e^{1} = e + \ln e + c$ $\Leftrightarrow$ $c=-1$

SVAR: $y = \ln(x + \ln x - 1)$, $x>1$.

---

2) a) $f(x) = 12e^{x-x^3} - (6-x^2)\sin(2x+x^2) =$

$$= \Big/ \begin{matrix} e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + O(t^5) \\ \sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5) \end{matrix} \Big/ =$$

$$= 12\left(1 + (x-x^3) + \frac{(x-x^3)^2}{2} + \frac{(x-x^3)^3}{6} + \frac{(x-x^3)^4}{24} + O(x^5)\right)$$

$$- (6-x^2)\left((2x+x^2) - \frac{(2x+x^2)^3}{6} + O(x^5)\right) =$$

$$= 12\left(1 + x - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right) +$$

$$- (6-x^2)\left(2x + x^2 - \frac{8x^3}{6} - \frac{12x^4}{6} + O(x^5)\right) = \ldots = 12 + \frac{3x^4}{2} + O(x^5)$$

SVAR: $f(x) = 12 + \frac{3x^4}{2} + O(x^5)$.

b) $f(x) = 12 + x^4\left(\frac{3}{2} + O(x)\right)$, alltså har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x=0$.

SVAR: Lokalt minimum.

3) Homogenlösning: $r^4 + 3r^2 = r^2(r^2+3) = r^2(r-i\sqrt{3})(r+i\sqrt{3})$.

Så $y_h = (Ax+B) + C\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x)$

Partikulärlösning: $y''_p = x/3$ ger $y_p^{(4)} = 0$.

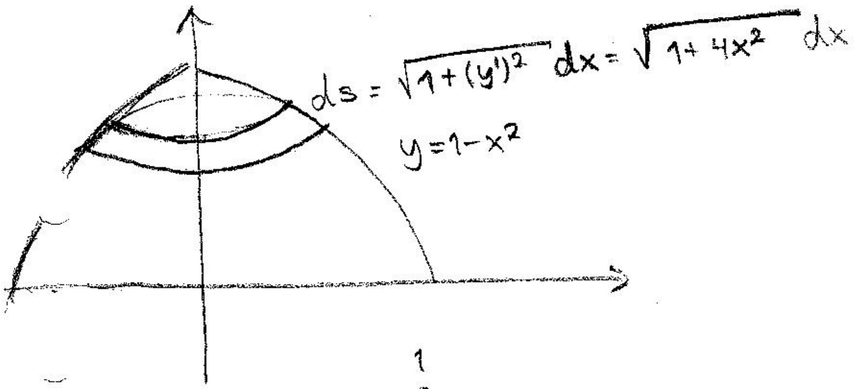
$$y''_p = \frac{x}{3} \Leftarrow y'_p = \frac{x^2}{6} \Leftarrow y_p = \frac{x^3}{18}$$

SVAR: $y = (Ax+B) + C\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x) + \frac{x^3}{18}$.

---

4) $$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t - t^2 \quad 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-(1-t)^2 = 1-x^2 \quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

D.v.s. kurvan är helt enkelt grafen till $y = 1-x^2$ $0 \le x \le 1$ (fast med omvänd orientering).



$$\text{Area} = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

SVAR: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

5 a) Vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$ som vi vet är konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(4n^2+n^7)}{1/n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4/n^5+1} = 1 \qquad (0<1<\infty)$$

<u>SVAR:</u> Konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + 1/n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(1/n)$.

Eftersom $0 < 1/n \leq 1 < \pi/2$ för $n \geq 1$ följer att serien är alternerande. Dessutom är $\sin x$ växande (och kontinuerlig) på $[0, \pi/2]$ med $\sin(0) = 0$.
Alltså gäller att termernas absolutbelopp
$|\sin(n\pi + 1/n)| = \sin(1/n)$ <u>avtar mot 0</u> då $n \to \infty$.
Därför är serien konvergent enligt Leibniz.

<u>SVAR:</u> Konvergent.

c) Vi vet att $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Så $\ln(3/2) = \ln(1+1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.

<u>SVAR:</u> $\ln(3/2)$.

---

6) a) $\sqrt[n]{|x^n e^{-\sqrt{n}}|} = |x| e^{-1/\sqrt{n}} \to |x|$ då $n \to \infty$.

Alltså har potensserien konvergensradie 1.
För $x=1$ får vi serien $\sum_{n=4}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$. Eftersom $e^{-\sqrt{x}}$ är avtagande på $[4, \infty)$ kan vi använda integralkriteriet:

$$\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_2^{\infty} 2te^{-t}\,dt = \lim_{T\to\infty} \left[-2te^{-t} - 2e^{-t}\right]_2^T = 6e^{-2} < \infty,$$

så $\sum_{n=4}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ är konvergent.

6 forts.) För $x=-1$ får vi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ som är absolutkonvergent enligt fallet $x=1$.

SVAR: $-1 \leq x \leq 1$.

b) $f'(x) = \sum_{n=4}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}} x^{n-1}$.

Vi noterar att $h(t) = t e^{-\sqrt{t}}$ uppfyller $h'(t) = \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) e^{-t} \leq 0$ för $t \geq 4$.

Så $h(t)$ är avtagande på $[4, \infty)$.

Alltså får vi

$$f'(1/e) = \sum_{n=4}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}} \frac{e}{e^n} \leq 4e^{-2} \cdot \frac{e}{e^4} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{e^j}$$

$$= 4e^{-5} \cdot \frac{e}{e-1} \leq 4e^{-4}.$$

---

7) Vi kommer i analogi med fallet $g(x)=x$ skriva $O(g(x)^j)$ för funktioner på formen $b(x)g(x)^j$ där $b(x)$ är begränsad nära origo.

Notera nu att

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^j}{x^j} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{g(x)}{x}\right)^j = g'(0)^j \neq 0.$$

Därför gäller att funktionen

$$k_j(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)^j}{x^j} & x \neq 0 \\ g'(0)^j & x = 0 \end{cases}$$

är begränsad och kontinuerlig nära $x=0$.

7 forts) Dessutom växlar $k_j(x)$ inte tecken nära origo, så $1/k_j(x)$ är också kontinuerlig och begränsad nära $x=0$.

Från detta följer enkelt att en funktion är $O(g(x)^j)$ om och endast om den är $O(x^j)$.

Vi visar nu succesivt påståendet att för varje $0 \le j \le n$ finns konstanter $c_0, \ldots, c_j$ s.a.

$$f(x) = c_0 + c_1 g(x) + \ldots + c_j g(x)^j + O(g(x)^{j+1}).$$

För $j=0$ vet vi att $f(x) = f(0) + O(x) = f(0) + O(g(x))$ så $c_0 = f(0)$.

Antag nu att vi hittat $c_0, \ldots, c_{j-1}$ som uppfyller kraven.

Funktionen $h(x) = f(x) - (c_0 + c_1 g(x) + \ldots + c_{j-1} g(x)^{j-1}) = O(x^j)$ ligger i $C^{n+1}(\mathbb{R})$, och uppfyller då $h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(j-1)}(0) = 0$ så

$$h(x) = \frac{h^{(j)}(0)x^j}{j!} + O(x^{j+1}) = \frac{h^{(j)}(0)}{j!\,g'(0)^j} g(x)^j + \frac{h^{(j)}(0)}{j!}\left(x^j - \frac{g(x)^j}{g'(0)^j}\right) + O(x^{j+1})$$

$$= /g(x) = g'(0)x + O(x^2)/ = c_j g(x)^j + \frac{h^{(j)}(0)}{j!}\left(O(x^{j+1})\right) + O(x^{j+1})$$

$$= c_j g(x)^j + O(g(x)^{j+1}).$$

Detta visar att konstanterna c_j existerar.

För att visa entydighet räcker det att visa att om $c_0 + c_1 g(x) + \ldots + c_n g(x)^n = O(g(x)^{n+1})$ då gäller $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Antag motsatsen, så att det finns minsta m s.a. $c_m \neq 0$.

Då gäller att $c_m g(x)^m + \ldots + c_n g(x)^n = c_m g'(0)^m x^m + O(x^{m+1}) = O(x^{n+1})$ vilket ej går om $c_m \neq 0$.

V.S.B.