Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2012-03-10 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till $yy' = x(1+y^2)$ som uppfyller $y(0) = 1$.

2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området givet av $0 \leq y \leq \ln x$ och $1 \leq x \leq e$ roteras ett varv kring linjen $y = 1$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = \sin x$.

4. Låt $f(x) = e^{2x^2} - 1$ för $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 7 till funktionen f med resttermen på ordoform. (1p)
   (b) Beräkna $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - 2x^2\big)/x^4$. (1p)
   (c) Bestäm $f^{(6)}(0)$. (1p)

5. Avgör om följande serier är konvergenta:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n$ (1p) (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2}{n^3}$ (1p) (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (1p)

6. Lös differentialekvationen $y'' - 2xy' - 4y = 0$, med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$, med en potensserieansats. Uttryck även lösningen med hjälp av elementära funktioner.

7. Låt C vara den kurva som ges av $y = e^{-x} + e^{x-1}$ och $0 \leq x \leq 1$. Visa att $A < 3\pi L$, där A är arean av den rotationsyta som uppstår då C roteras ett varv runt x-axeln och L är längden av C.

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG ENVARIABELANALYS 2, 2012-03-10.

1) $yy' = x(1+y^2) \Leftrightarrow \dfrac{2y}{(1+y^2)}\, y' = 2x \Leftrightarrow \int \dfrac{2y}{1+y^2}\,dy = \int 2x\,dx$

$\Leftrightarrow \ln(1+y^2) = x^2 + C.$

$y(0) = 1$ ger $\ln(1+1) = 0^2 + C$, d.v.s. $C = \ln 2$.

Så $e^{\ln(1+y^2)} = 1+y^2 = e^{x^2+\ln 2} = 2e^{x^2}$

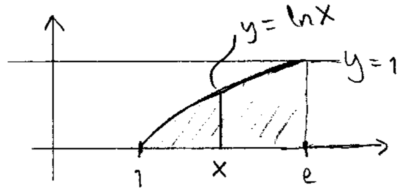
$\Leftrightarrow y^2 = 2e^{x^2} - 1$. Då $y(0) = 1 > 0$ får vi

$y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}$. (OBS: $2e^{x^2} - 1 \geq 1 > 0$ för alla x).

SVAR: $y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}$.

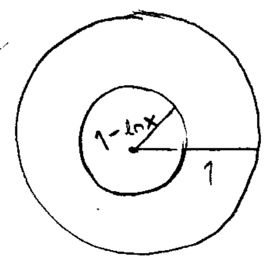
---

2)



Linjesegmentet $0 \leq y \leq \ln x$ för ett fixt x ger vid rotationen upphov till en ihålig cirkelskiva med area $\pi 1^2 - \pi(1-\ln x)^2 =$

$= \pi(2\ln x - (\ln x)^2)$



$\text{Volym} = \pi \int_1^e (2\ln x - (\ln x)^2)\,dx = \Big/ \begin{matrix} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{matrix} \Big/ =$

$= \pi \int_0^1 (2t - t^2) e^t\,dt = $ /Partiell integration.../ $=$

$= \pi \left[(2t - 2 - t^2 + 2t - 2) e^t \right]_0^1 = \pi(4 - e)$

SVAR: $\pi(4-e)$.

3)

Homogenlösning: $r^2+2r+1=(r+1)^2$ så $y_h=(Ax+B)e^{-x}$.

Partikulärlösning: $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Vi hittar en partikulärlösning z till $z''+2z'+z=e^{ix}$ och sätter $y_p=\operatorname{Im} z$.

Låt $z=we^{ix}$.

$z''+2z'+z=(D+1)^2(we^{ix})=$ /förskjutningsregeln/ $=e^{ix}((D+i)+1)^2 w$

$=e^{ix}(D^2+2(1+i)D+(1+i)^2)w=e^{ix}$

$\Leftrightarrow$ $(D^2+2(1+i)D+(1+i)^2)w=1$. Med w konstant får vi

$$w=\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}.$$

$z=-\frac{i}{2}e^{ix}=-\frac{i}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$. $y_p=\operatorname{Im} z=-\frac{1}{2}\cos x$

SVAR: $y=(Ax+B)e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$.

---

4)

(a) $f(x)=e^{2x^2}-1=\Big/ e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+O(t^4)\Big/=$

$=1+(2x^2)+\frac{(2x^2)^2}{2}+\frac{(2x^2)^3}{6}+O((2x^2)^4)-1=$

$=2x^2+2x^4+\frac{4x^6}{3}+O(x^8)$

SVAR: $2x^2+2x^4+\frac{4x^6}{3}+O(x^8)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+2x^4+O(x^6)-2x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}(2+O(x^2))=2$

SVAR: 2.

(c) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6+O(x^7)$. Så $\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow$ $f^{(6)}(0)=\frac{4\cdot 6!}{3}=960$ SVAR: 960.

5)

(a) $(-1)^n \ln n \not\to 0$ då $n \to \infty$ så divergent enligt divergenstestet.

SVAR: Divergent.

(b) $\sin(2/n^3) = \left| \sin t = t + O(t^3) \right| = \frac{2}{n^3} + O(1/n^9)$

Vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ som är konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2/n^3)}{1/n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + O(1/n^6)\right) = 2 \qquad (0<2<\infty)$$

SVAR: Konvergent.

(c) Vi använder kvottestet.

$$\left| \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\right) \Big/ \left(\frac{n^2}{n!}\right) \right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(n+1)} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)} \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså är serien konvergent.

SVAR: Konvergent.

(Alternativt kan man ganska lätt uppskatta serien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = 3 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \leq 3 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ldots)$$

6) Eftersom $y(0)=0$ kan vi ansätta $y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, där

$y'(0)=1$ ger $c_1=1$.

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

$$y''-2xy'-4y=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} 2(n-2)c_{n-2} x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} 4c_{n-2}x^{n-2}$$

$$= 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(n(n-1)c_n - (2(n-2)+4)c_{n-2}\right)x^{n-2} = 0$$

Så $\quad c_2 = 0, \quad n(n-1)c_n - 2nc_{n-2} = 0 \Leftrightarrow$

$$c_n = \frac{2}{n-1} c_{n-2} \qquad n \geq 3$$

Vi ser att $c_2=0 \Rightarrow c_4=0 \Rightarrow c_6=0 \ldots$

$$c_{2n+1} = \frac{2}{2n+1-1} c_{2n+1-2} = \frac{1}{n} c_{2n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1} c_{2n-3}\right) = \ldots = \frac{1}{n!} c_1 =$$

$$= \frac{1}{n!}$$

D.v.s. $\quad y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}.$

SVAR: $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = xe^{x^2}.$

7) Med $ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ gäller att

$$L = \int_0^1 ds, \quad A = 2\pi \int_0^1 y\,ds .$$

Så $A \le 2\pi \left(\max_{0\le x\le 1} y(x)\right) \int_0^1 ds = 2\pi \left(\max_{0\le x\le 1} y(x)\right) L$.

Vi uppskattar $\max_{0\le x\le 1} y(x)$: $y(0) = y(1) = 1 + 1/e < 1 + 1/2 = \frac{3}{2}$.

$y'(x) = -e^{-x} + e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$. $y(1/2) = \frac{2}{\sqrt{e}} \le \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Så $A \le 2\pi \left(\max_{0\le x\le 1} y(x)\right) L < 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot L = 3\pi L$

vilket visar påståendet.