Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2012-01-14 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området givet av $0 \leq y \leq \arctan x$ och $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring linjen $x = 2$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^x$.

4. Låt $f(x) = (\cos x - 1)/x^2$ då $x \neq 0$, och låt $f(0) = -1/2$.
   (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 5 till funktionen f med resttermen på ordoform. (1p)
   (b) Beräkna $\lim_{x\to 0} \big(f(x) + 1/2\big)/x^2$. (1p)
   (c) Avgör om funktionen f har ett lokalt extremvärde i $x = 0$. (1p)

5. (a) Avgör om $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^2+x}\,dx$ är konvergent. (1p)
   (b) Avgör om $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ är konvergent. (2p)

6. (a) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ serien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{nx^n}{7^n}$ är konvergent. (2p)
   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{4^{n-1}}$. (1p)

7. För varje fix vinkel φ mellan 0 och $\pi/2$, låt S_φ vara den sträcka i xy-planet som i polära koordinater ges av $1 \leq r \leq 1+\varphi$. Låt vidare K_φ vara den kvadrat som har S_φ som en sida och som står vinkelrät upp från xy-planet. Bestäm volymen av den kropp som utgörs av alla K_φ då φ går från 0 till $\pi/2$.

Lycka till!

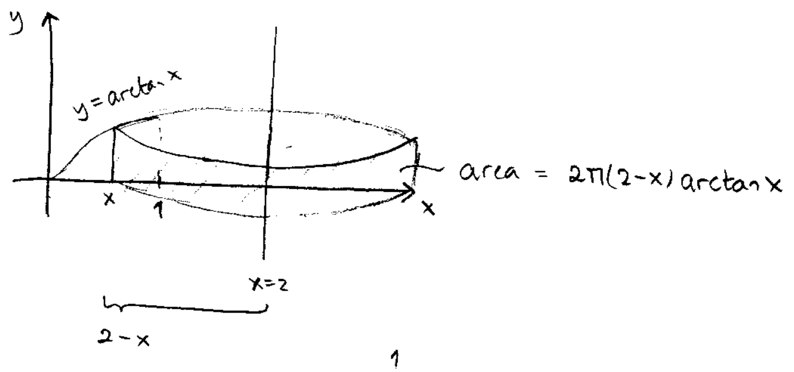
Lösningsskiss, Envariabelanalys 2 2012-01-14

1) $(1+x^2)y' + 2xy = ((1+x^2)y)' = 1 \iff (1+x^2)y = x + C$

$\iff y = \frac{x+C}{1+x^2}$. $y(0) = C = 1$. SVAR: $y = \frac{1+x}{1+x^2}$

---

2)



Volymen ges av $2\pi \int_0^1 (2-x)\arctan x \, dx = /P.I./$

$$= 2\pi\left(\left[\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x - x^2/2}{1+x^2}\, dx \right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\pi}{8} - \int_0^1 \left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1/2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\, \frac{1+x^2}{1+x^2} \right) dx \right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\pi}{8} - \left[\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} \right]_0^1 \right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2 \right)$$

SVAR: $2\pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2\right)$

3)
$$r^3+r^2-5r+3=(r-1)(r^2+2r-3)=(r-1)(r-1)(r+3)$$

$$y_h=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-3x}$$

Substituera $y_p=ze^x$ i ekvationen:

$$(D^3+D^2-5D+3)y_p=(D-1)^2(D+3)(ze^x)=\text{/förskjutningsregeln/}$$

$$=e^x(D-1+1)^2(D+3+1)z=e^xD^2(D+4)=e^x(z'''+4z'')=e^x$$

ger $z'''+4z''=1$. Välj $z''=1/4$, $z'=x/4$, $z=x^2/8$.

SVAR: $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{8}\right)e^x+C_3e^{-3x}$

---

4) a)
$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+O(x^8)\right)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^4}{720}+O(x^6)$$

SVAR: $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^4}{720}+O(x^6)$.

b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/2+\frac{x^2}{24}+O(x^4)+1/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{24}+O(x^2)\right)=\frac{1}{24}$$

SVAR: $1/24$

c)
$f(x)=-\frac{1}{2}+x^2\left(\frac{1}{24}+O(x^2)\right)$, så lokalt minimum i $x=0$,

(eftersom $x^2\left(\frac{1}{24}+O(x^2)\right)$ är strängt positivt för x nära 0, $x\neq 0$, och $=0$ då $x=0$).

SVAR: lokalt (strängt) minimum.

---

5)

a) $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^2+x}\,dx \geq \Big/ \frac{x^2}{x^2+x} \geq \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ då $x \geq 1 \Big/$

$\geq \int_1^\infty \frac{1}{2}\,dx = \infty$.

SVAR: Divergent.

b) Serien är alternerande, $\left|\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ går mot noll

då $n\to\infty$, men vi måste visa att dessa är avtagande.

$f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ uppfyller $f'(x) = -\frac{1}{(x-\sqrt{x})^2}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 0$ då $x \geq 2$,

så $f(x)$ är avtagande på $[2,\infty)$, och alltså är serien konvergent enligt Leibniz.

SVAR: Konvergent.

---

6)

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{nx^n}{7^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|x|^n}{7^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\frac{|x|}{7} = \frac{|x|}{7}$.

Enligt rotkriteriet konvergerar serien om:

$\frac{|x|}{7} < 1 \Leftrightarrow |x| < 7 \Leftrightarrow -7 < x < 7$.

För $x = \pm 7$ gäller $\frac{nx^n}{7^n} = \pm n \not\to 0$ då $n\to\infty$, alltså divergerar serien för dessa x.

SVAR: $-7 < x < 7$.

b) $\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. $\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^\infty x^n = \sum_{n=1}^\infty n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

Med $x = 1/4$ får vi

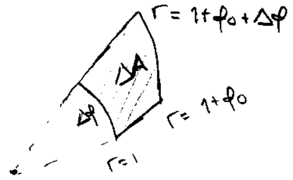
$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^\infty n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-1/4)^2} = \frac{16}{9}$

SVAR: 16/9

---

(4)

7) Om vi för varje fix vinkel $\varphi_0 \in [0, \pi/2)$ och $\Delta\varphi$ litet tittar på den kropp som utgörs av alla K_φ med $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + \Delta\varphi$, då ges projektionen av denna i xy-planet av $1 \le r \le 1+\varphi$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + \Delta\varphi$



Arean ΔA av detta område uppfyller olikheterna

$$\frac{(1+\varphi_0)^2}{2}\Delta\varphi - \frac{1^2}{2}\Delta\varphi \le \Delta A \le \frac{(1+\varphi_0+\Delta\varphi_0)^2}{2}\Delta\varphi - \frac{1^2}{2}\Delta\varphi$$

(där vi använt att en cirkelsektor med radie R och vinkel α har area $R^2\alpha/2$).

Kroppens höjd varierar mellan φ_0 och $\varphi_0 + \Delta\varphi_0$, och alltså kan vi uppskatta volymen ΔV av detta "volymselement":

$$\left(\frac{(1+\varphi_0)^2}{2}\Delta\varphi - \frac{1^2}{2}\Delta\varphi\right)\varphi_0 \le \Delta V \le \left(\frac{(1+\varphi_0+\Delta\varphi)^2}{2}\Delta\varphi - \frac{1^2}{2}\Delta\varphi\right)(\varphi_0 + \Delta\varphi).$$

Så $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta\varphi} = \left(\frac{(1+\varphi_0)^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\varphi_0$. D.v.s. $dV = \frac{1}{2}((1+\varphi)^2 - 1)\varphi\, d\varphi$.

$$\int_0^{\pi/2} dV = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} ((1+\varphi)^2 - 1)\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\varphi + \varphi^2)\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\varphi^2 + \varphi^3)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^4}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^4}{128}$$

SVAR: $\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^4}{128}$