LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2011-08- 25kl 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut.

1. Området givet av olikheterna $0 \leq y \leq \dfrac{x}{1+x^2}$ och $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring linjen $x = 2$. Beräkna rotationskroppens volym.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' = 2y' - 3 + 4e^x$.

3. (a) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax) - 2x}{x \arctan x}$ existerar ändligt samt beräkna gränsvärdet. (2 p)

   (b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 4 för $f(x) = \sin(1 - \cos x)$. (1 p)

4. (a) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 \sin x} - \frac{1}{x^3}\right) dx$ är konvergent eller ej. (1 p)

   (b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n}$ konvergent? (2 p)

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy'' + (x-1)y' = e^{-x},\ x > 0$.

6. För vilka $a \in \mathbf{R}$ är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(e^{ax})\, dx$ konvergent?

7. Konvergerar eller divergerar serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e - (1+1/n)^n}{1/2 + 1/3 + \ldots 1/n}$?

Envariabelanalys 2, TATA42, 2011-08-25, lösningsförslag

1. Areaelement $\dfrac{xdx}{1+x^2}$ och rotationsradie $2-x$ ger att volymen är $2\pi\displaystyle\int_0^1 \frac{x(2-x)}{1+x^2}\,dx =$ $/\dfrac{x(2-x)}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2} - 1 + \dfrac{1}{1+x^2}/ = 2\pi\displaystyle\int_0^1 (\frac{2x}{1+x^2} - 1 + \frac{1}{1+x^2})\,dx =$ $2\pi[\ln((1+x^2) - x + \arctan x]_0^1 = 2\pi(\ln 2 - 1 + \arctan 1)$.
   Svar: Volymen är $2\pi(\ln 2 - 1 + \dfrac{\pi}{4})$.

2. $y'' = 2y' - 3 + 4e^x \Leftrightarrow y'' - 2y' = -3 + 4e^x$ Karaktäristiskt polynom är $r^2 - 2r = r(r-2)$ och $y_h = C_1 + C_2e^{2x}$.

   Ansättningen $y_p = Ax + Be^{4x}$ ger partikulärlösningen $y_p = \dfrac{3x}{2} - 4e^x$. En godtycklig lösning ges således av $y = y_h + y_p = C_1 + C_2e^{2x} + \dfrac{3x}{2} - 4e^x$.

   Svar: $C_1 + C_2e^{2x} + \dfrac{3x}{2} - 4e^x$.

3. (a) $\dfrac{\ln(1+ax)}{x\arctan x} = /\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + O(t^3), \arctan x = x + O(x^3)/ = \dfrac{ax - \frac{(ax)^2}{2} + O(x^3) - 2x}{x(x+O(x^3))} =$ $\dfrac{x^2(\frac{a-2}{x} - \frac{a^2}{2} + O(x))}{x^2(1+O(x))} = /a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ är nödvändigt för gränsvärde/ $= \dfrac{-\frac{2^2}{2} + O(x)}{1+O(x)} \to -2$ då $x \to 0$ Svar: $a = 2$ ger gränsvärdet -2.

   (b) $\sin(1-\cos x) = /\sin t = t + O(t^3),\ 1 - \cos x = 1 - (1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + O(x^6)) =$ $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + O(x^6)/ = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + O(x^6)$. Svar: $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$.

4. (a) Generaliserad i 0.
   $\dfrac{1}{x^2\sin x} - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x - \sin x}{x^3\sin x} = /\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + O(x^5)/ = \dfrac{x - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))}{x^3(x + O(x^3))} =$ $\dfrac{x^3(\frac{1}{6} + O(x^2))}{x^4(1+O(x^2))} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1/6 + O(x^2)}{1+O(x^2)}$. Eftersom $\dfrac{\frac{1}{x^2\sin x} - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1/6 + O(x^2)}{1+O(x^2)} \to \dfrac{1}{6}$ då $x \to 0$ och $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ är divergent följer av jämförelsekriteriet att även $\displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{x^2\sin x} - \frac{1}{x^3})\,dx$ är divergent. Svar: Divergent

   (b) Eftersom $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\frac{4^{n+1}x^{2n}}{n}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{1+\frac{1}{n}}x^2}{n^{1/n}} = 4\cdot x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2$ ger rotkriteriet att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n}$ är konvergent för $|x| < \dfrac{1}{2}$ och divergent för $|x| > \dfrac{1}{2}$.

   $x = \pm\dfrac{1}{2}$ ger serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}$ som är divergent. Svar: Konvergent för $|x| < 1/2$.

5. Första ordningens linjär DE i y'.

Sätt $z = y'$ så fås $xz' + (x-1)z = e^{-x} \Leftrightarrow z' + (1 - \frac{1}{x})z = \frac{e^{-x}}{x} \Leftrightarrow / \int (1 - \frac{1}{x})\ dx = /x > 0/ = x - \ln x + C,\ IF:\ e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{x} / \Leftrightarrow (\frac{e^x}{x} z)' = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} z = -\frac{1}{x} + D \Leftrightarrow z = -e^{-x} + Dxe^{-x}$.

$y' = -e^{-x} + Dxe^{-x} \Leftrightarrow y = -\int e^{-x}\ dx + D \int xe^{-x}\ dx = / \int xe^{-x}\ dx = /PI/ = -xe^{-x} - e^{-x} + E / = e^{-x} - Dxe^{-x} - De^{-x} + F.$ Svar: $y = (1-D)e^{-x} - Dxe^{-x} + F$.

6. Om $a \leq 0$ och $x \geq 0$ gäller att $0 < e^{ax} \leq 1$ och att $\cos e^{ax} \geq \cos 1 > 0$ ty cos är avtagande på $[0,1]$. Således är integralen divergent för $a \leq 0$.

Låt $a > 0$. Då gäller att $\int_0^b \cos(e^{ax})\ dx = /t = e^{ax} \Leftrightarrow x = \frac{\ln t}{a},\ dx = \frac{dt}{at}/ = \frac{1}{a}\int_1^{e^{ab}} \frac{\cos t}{t}\ dt = /PI/ = \frac{1}{a}[\frac{\sin t}{t}]_1^{e^{ab}} + \frac{1}{a}\int_1^{e^{ab}} \frac{\sin t}{t^2}\ dt = \frac{\sin e^{ab}}{ae^{ab}} - \frac{\sin 1}{a} + \frac{1}{a}\int_1^{e^{ab}} \frac{\sin t}{t^2}\ dt \to -\frac{\sin 1}{a} + \frac{1}{a}\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}\ dt$ då $b \to \infty$ eftersom den sista integralen är konvergent ty $\int_1^{\infty} |\frac{\sin t}{t^2}|\ dt \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$. Svar: Konvergent för $a > 0$.

7. $e - (1 + \frac{1}{n})^n = e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e - e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3}))} = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e(1 - e^{-\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})}) = e(1 - (1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})) = \frac{e}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$. Speciellt följer att termerna är positiva åtminstone för stora n.

Jämförelse mellan summa och integral visar att $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$. Således gäller att $\frac{e - (1 + \frac{1}{n})^n}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} > \frac{e + O(\frac{1}{n})}{2n \ln n} > \frac{1}{n \ln n}$ om n är tillräckligt stort.

Integralkriteriet ger att $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ är divergent ty $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = /t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t,\ dx = e^t dt/ = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^t dt}{te^t} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t}$ som är divergent. Således följer av jämförelsekriteriet att serien är divergent. Svar: Serien är divergent.