Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2011-06-09 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = e^y \sin x$ som uppfyller $y(\pi) = 0$.

2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området givet av $0 \leq y \leq 1 - x^2$ roteras ett varv kring linjen $y = 2$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = \sin 2x$.

4. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \big(x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x - x\big)$. (1p)

   (b) Bestäm ett rationellt tal som approximerar e^{-2} med ett fel som är mindre än $1/10$. (2p)

5. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2 \frac{1}{n}$ är konvergent. (1p)

   (b) Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!}$. (1p)

   (c) Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$. (1p)

6. Området givet av $4(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 4$ roteras ett varv kring linjen $y = x$. Beräkna rotationskroppens volym.

7. Låt y vara den lösning till differentialekvationen $y'' + xy' + 3y = 0$ som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Beräkna värdet av
$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, dx.$$

Lycka till!

SVAR M.M TATA42 2011.06.09

1

1) $y' = e^y \sin x \iff e^{-y}y' = \sin x$.

$\int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx$ ger

$-e^{-y} = -\cos x - C \iff e^{-y} = \cos x + C$.

$y(\pi) = 0$ ger nu $e^{-0} = 1 = \cos\pi + C = -1 + C \iff C = 2$,

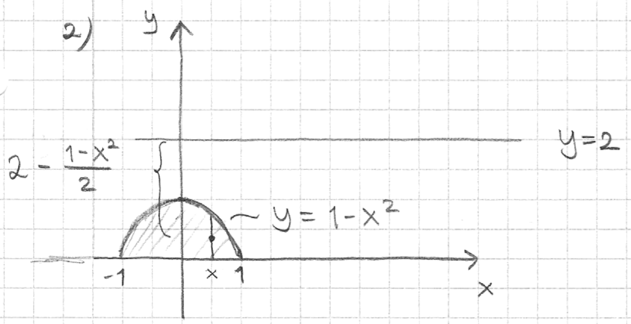
så

$y = -\ln e^{-y} = -\ln(\cos x + 2)$ (OBS! $\cos x + 2 \geq 1 > 0$).

SVAR: $y = -\ln(\cos x + 2)$.

---

2)



$dA = (1-x^2)\,dx$, TP:s väg för $dA = 2\pi\left(2 - \frac{1-x^2}{2}\right) = 3\pi + \pi x^2$

Så

$$V = \int_{-1}^{1} (3\pi + \pi x^2)(1-x^2)\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (3 - 2x^2 - x^4)\,dx =$$

$$= \pi\left[3x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{64\pi}{15}$$

SVAR: $\frac{64\pi}{15}$

3) $y'' + 4y = \sin 2x$

Homogenlösning: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$ ger $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

Partikulärlösning: $\sin 2x = \operatorname{Im}(e^{i2x})$, låt $y_p = \operatorname{Im} W$, $W = z e^{i2x}$:

$W'' + 4W = (D+2i)(D-2i) z e^{i2x} = /\text{förskjutning}/ = e^{i2x}(D+4i)Dz =$

$= e^{i2x}(z'' + 4iz') = e^{i2x} \Leftrightarrow z'' + 4iz' = 1$

vilket löses t.ex. av $z = -\frac{ix}{4}$ $\left(z' = -\frac{i}{4},\ z'' = 0\right)$.

$y_p = \operatorname{Im}\left(-\frac{ix}{4} e^{i2x}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{ix}{4}\cos 2x + \frac{x}{4}\sin 2x\right) = -\frac{x}{4}\cos 2x$.

SVAR: $y = \left(A - \frac{x}{4}\right)\cos 2x + B\sin 2x$.

---

4) a: $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln(1+x) - x^2\ln x - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\right) =$

$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) - t}{t^2}\right) =$

$= \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2} + O(t)\right) = -\frac{1}{2}$

SVAR: $-1/2$.

b: $e^{-2} = (e^{-1})^2$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, så $e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

Detta är en Leibniz-serie, så med
$a = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}$, $b = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ har vi $|a| \le 1$, $|b| \le \frac{1}{(N+1)!}$.

Nu gäller att

$e^{-2} = (e^{-1})^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$|2ab + b^2| \le 2|a||b| + b^2 \le 2|b| + b^2 \le \frac{2}{(N+1)!} + \left(\frac{1}{(N+1)!}\right)^2$.

Med $N = 3$ får vi $|2ab + b^2| \le \frac{2}{24} + \left(\frac{1}{24}\right)^2 < \frac{1}{10}$,

$a = \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $a^2 = 1/9$.

SVAR: $1/9$.

5) a: $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin^2 1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n \sin 1/n)^2 = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 1$

$(0 < 1 < \infty)$. Då $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ är divergent,

och $n \sin^2 1/n \geq 0$ ger jämförelsetestet att

serien är divergent

SVAR: Divergent.

b: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, så $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} = e^4$.

SVAR: e^4

c: Med $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ gäller

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

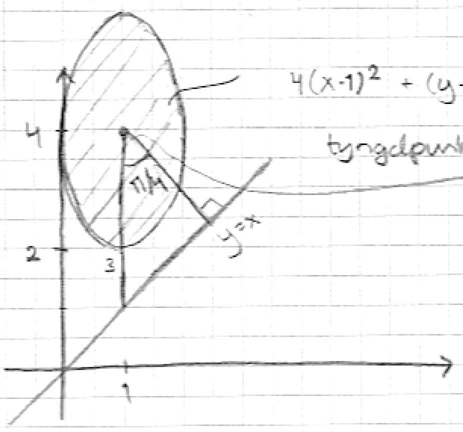
Så $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-1/3)^2} + 2 \cdot \frac{1}{1-1/3} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}$

SVAR: 15/4.

6)



$4(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 4$ är en ellips med tyngdpunkt i $(1,4)$, $\text{area} = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$

och vinkelrätt avstånd mellan $(1,4)$ och $y=x$ ges av

$3 \cdot \cos(\pi/4) = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Vi har alltså TP:s väg är $2\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\pi$

Så enligt Guldin's regel får vi volymen $3\sqrt{2}\pi \cdot 2\pi = 6\sqrt{2}\pi^2$.

Alternativ:

$\{(x,y) : 4(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 4\} =$

$= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 4 - \sqrt{4 - 4(x-1)^2} \leq y \leq 4 + \sqrt{4 - 4(x-1)^2}\}$.

Så för varje $x \in [0,2]$ har vi ett areaelement

$dA = 2\sqrt{4 - 4(x-1)^2}\, dx$, som har tyngdpunkt med y-koordinat 4. Så TP:s väg för dA ges av $2\pi \cdot (4-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi(4-x)$. Så

$$V = \int_0^2 \sqrt{2}\pi(4-x)\, 2\sqrt{4-4(x-1)^2}\, dx =$$

$$= 4\sqrt{2}\pi \int_0^2 (4-x)\sqrt{1-(x-1)^2}\, dx = \left/ \begin{matrix} x-1 = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \end{matrix} \right/$$

$$= 4\sqrt{2}\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 - \sin t)\cos^2 t\, dt = \ldots = 6\sqrt{2}\pi^2$$

SVAR: $6\sqrt{2}\pi^2$

7) Om $y=f(x)$ löser $y''+xy'+3y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ ser vi att även $y=f(-x)$ gör det.

D.v.s y är en jämn funktion, så den primitiva funktion Y till y s.a. $Y(0)=0$ är udda.

$$Y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x^2)^n \quad \text{ger}$$

$$y=Y'=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(2n+1)x^{2n}, \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(2n+1)2n\,x^{2n-1}$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(2n+1)2n(2n-1)x^{2n-2}$$

$y(0)=1$ ger $c_0=1$ ($y'(0)=0$ följer av att Y är udda).

$$y''+xy'+3y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(2n+1)2n(2n-1)x^{2n-2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(2n+1)2n\,x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n(2n+1)x^{2n} =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(c_{n+1}(2n+3)(2n+2)(2n+1) + c_n(2n+1)2n + 3c_n(2n+1)\Big)x^{2n}$$

$=0$, vilket ger

$$c_{n+1} = -\frac{(2n+1)2n+3(2n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}c_n = \frac{-1}{2n+2}c_n =$$

$$=\frac{-1}{2n+2}\left(\frac{-1}{2n}c_{n-1}\right)=\ldots=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}c_0 .$$

D.v.s. $$Y=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n(x^2)^n\cdot\frac{1}{n!} = x\sum\frac{(-x^2/2)^n}{n!}=xe^{-x^2/2}.$$

Vi har $\lim_{T\to\pm\infty} Y(T)=0$, så

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\,dx = \left(\lim_{T\to-\infty}\int_T^0 y(x)\,dx\right)+\left(\lim_{T\to\infty}\int_0^T y(x)\,dx\right)=$$

$$=\left(\lim_{T\to-\infty} Y(T)\right)+\left(\lim_{T\to\infty}Y(T)\right)=0+0=0.$$

<u>SVAR</u>: 0.