Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

# Tentamen i Envariabelanalys 2

**2011–05–28 kl 08.00–13.00**

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.

2. Området givet av $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2+2x}$ och $1 \leq x \leq 2$ roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Beräkna rotationskroppens volym.

3. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-\sin(2x)}{x^2}$.

   (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}(e^x - x)^{\frac{1}{x^2}}$.

   (c) Avgör om $\cos 2x + 2x^2$ har lokalt maximum eller lokalt minimum för $x = 0$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y' + \sqrt{y} = \sqrt{y}\ln x,\ 0 < x < 1$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(\frac{1}{2}) = (\ln 2)^2$.

5. (a) Avgör om serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-n}$ är konvergent eller ej. (1 p)

   (b) För vilka reella $x$ är funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n\cdot 4^n}$ deriverbar? Bestäm även $f'(-2)$. (2p)

6. Bestäm ett närmevärde för längden av kurvan $y = \ln x,\ 5 \leq x \leq 10$, så att felet är mindre än $\frac{1}{1000}$.

7. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ som uppfyller $y(0) = 0$. Svaret skall ges på så enkel form som möjligt.

**Lycka till!**

## Envariabelanalys 2, TATA42, 2011-05-28, lösningsförslag

1. Karaktäristiskt polynom är $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$ och $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.
   $(D-2)(D+1)y = 3e^{2x} \Leftrightarrow /y = e^{2x}z/ \Leftrightarrow (D+2-2)(D+2+1)z = D(D+3)z = z'' + 3z' = 3$. Ansättningen $z_p = Ax$ ger $A = 1$ och partikulärlösningen $y_p = xe^{2x}$. En godtycklig lösning ges således av $y = y_h + y_p = (C_1 + x)e^{2x} + C_2 e^{-x}$.
   Svar: $y = (C_1 + x)e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

2. Volymen är $2\pi \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx = /\frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{1/2}{x+2} + \frac{1/2}{x}/ = \pi(\int_1^2 \frac{dx}{x+2} + \int_1^2 \frac{dx}{x}) = \pi[\ln(x+2) + \ln x]_1^2 = \pi(\ln 4 + \ln 2 - \ln 3) = \pi \ln \frac{8}{3}$. Svar: Volymen är $\pi \ln \frac{8}{3}$.

3. (a) $\dfrac{\ln(1+2x) - \sin 2x}{x^2} = /\ln(1+2x) = 2x - \dfrac{(2x)^2}{2} + O(x^3), \sin 2x = 2x + O(x^3)/ = \dfrac{2x - 2x^2 - 2x + O(x^3)}{x^2} = -2 + O(x) \to -2$ då $x \to 0$.
   Svar: Gränsvärdet är $-2$.

   (b) $(e^x - x)^{1/x^2} = e^{\ln(e^x-x)^{1/x^2}} = e^{\frac{\ln(e^x-x)}{x^2}} = /e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + O(x^3), \ln(e^x - x) = \ln(1+\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)) = \dfrac{x^2}{2}+O(x^3), \dfrac{\ln(1+\frac{x^2}{2}+O(x^3))}{x^2} = \dfrac{\frac{x^2}{2}+O(x^3)}{x^2} = \dfrac{1}{2}+O(x)/ = e^{\frac{1}{2}+O(x)} \to \sqrt{e}$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är $\sqrt{e}$.

   (c) $f(x) = \cos 2x + 2x^2 = /\text{ML}/ = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + O(x^6) + 2x^2 = 1 + \dfrac{2x^4}{3} + O(x^6) = 1 + x^4(\dfrac{2}{3} + O(x^2)) \geq 1 = f(0)$ om $x$ är nära 0. Således har vi ett lokalt min för $x = 0$. Svar: Lokalt min.

4. Första ordningens separabel DE.
   $x^2y' + \sqrt{y} = \sqrt{y}\ln x \Leftrightarrow x^2y' = \sqrt{y}(\ln x - 1) \Leftrightarrow /y \neq 0/ \Leftrightarrow \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = \dfrac{\ln x - 1}{x^2} \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{\ln x - 1}{x^2}\,dx \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = \int \frac{\ln x - 1}{x^2}\,dx = /\text{PI}/ = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x}{x} + C$.
   Villkoret $y(\frac{1}{2}) = (\ln 2)^2$ ger att $2\ln 2 = -\dfrac{\ln(1/2)}{1/2} + C \Leftrightarrow C = 0$. Således är $2\sqrt{y} = -\dfrac{\ln x}{x} \Leftrightarrow y = (\dfrac{\ln x}{2x})^2$ den sökta lösningen. Svar: $y = (\dfrac{\ln x}{2x})^2$.

5. (a) Positiv serie. $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2-n} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} \cdot \dfrac{1+1/\sqrt{n}}{1-1/n} = \dfrac{1}{n^{3/2}} \cdot \dfrac{1+1/\sqrt{n}}{1-1/n}$. Eftersom $= \dfrac{\frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+1/\sqrt{n}}{1-1/n}}{1/n^{3/2}} = \dfrac{1+1/\sqrt{n}}{1-1/n} \to 1$ då $n \to \infty$ och $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent följer att serien är konvergent enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform. Svar: Serien är konvergent.

(b) Rotkriteriet ger att $\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\frac{(x+3)^n}{n4^n}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|}{n^{1/n}4} = \frac{|x+3|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x+3| < 4 \Leftrightarrow$ $-4 < x+3 < 4 \Leftrightarrow -7 < x < 1$. Således är $f$ deriverbar i intervallet $]-7,1[$.

Termvis derivering ger att $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n-1}}{4^n}$ om $x \in ]-7,1[$. Detta ger att

$f'(-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ = /geo. serie med kvot 1/4 och första term 1/4/ $= \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$.

Svar: Deriverbar i intervallet $]-7,1[$ och $f'(-2) = \frac{1}{3}$.

6. Kurvlängden $S = \int_5^{10} \sqrt{1+(D\ln x)^2}\, dx = \int_5^{10} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\, dx$.

Enligt MacLaurins formel gäller, för $|t| < 1$, att $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8(1+\xi)^{3/2}}$, där $\xi$ är mellan 0 och $t$. Med $t = \frac{1}{x^2}$ fås att $S = \int_5^{10} (1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4(1+\xi)^{3/2}})\, dx = 5 +$ $[-\frac{1}{2x}]_5^{10} - \frac{1}{8}\int_5^{10} \frac{dx}{x^4(1+\xi)^{3/2}} \Rightarrow |S-(5-\frac{1}{20}+\frac{1}{10})| = |S-\frac{101}{20}| = \frac{1}{8}\int_5^{10} \frac{dx}{x^4(1+\xi)^{3/2}} \leq$ $/0 \leq \xi \leq \frac{1}{x^2}/ \leq \frac{1}{8}\int_5^{10} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{8}[-\frac{1}{3x^3}]_5^{10} = \frac{1}{24}(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{10^3}) < \frac{1}{1000}$. Således är $\frac{101}{20}$ ett närmevärde med fel $< \frac{1}{1000}$. Svar: Exempelvis $\frac{101}{20}$.

7. Ansätt $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. $y(0) = 0$ ger $c_0 = 0$.

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ och $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$ insatt i DE ger $x\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} -$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 4x^3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+3} = c_2 2x +$ $c_3 6x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+4}(n+4)(n+3)x^{n+3} - c_1 - c_2 2x - c_3 3x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+4}(n+4)x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+3} =$ $-c_1 + c_3 3x^2 + \sum_0^{\infty}(c_{n+4}(n+4)(n+2) + 4c_n)x^{n+3} = 0$ för alla $x$. Detta medför att $c_1 = c_3 = 0$ och att $c_{n+4} = -\frac{4c_n}{(n+4)(n+2)}$ för $n \geq 0$.

$c_1 = c_3 = 0$ medför att $c_n = 0$ för alla udda heltal $n$ och $c_0 = 0$ medför att $c_n = 0$ om $n = 4k$ för något heltal $k \geq 0$. Sätt $c_2 = A$ och antag att $c_{4k+2} = (-1)^k \frac{A}{(2k+1)!}$. Detta är sant för $k = 0$ och rekursionsformeln ger att $c_{4(k+1)+2} = (-1)^{k+1} \frac{4\frac{A}{(2k+1)!}}{(4k+6)(4k+4)} =$ $(-1)^{k+1}\frac{A}{(2(k+1)+1)!}$. Således gäller att $y = A\sum_0^{\infty}(-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = A\sum_0^{\infty}(-1)^k \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$ $A\sin x^2$. Svar: $A\sin x^2$.