Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2011-03-19 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Området givet av $0 \leq y \leq e^x$ och $0 \leq x \leq \ln 2$ roteras ett varv kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + (\sin x)y = \sin x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

3. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{12\sqrt[3]{8+x} - 24 - x}{x^2}$ (1p)

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x \arctan x} \right)$ (2p)

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - 3y'' + 2y' = 2x + 6x^2$.

5. (a) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2 - 3}\,dx$ är konvergent. (1p)

   (b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{3n}}{n3^n}$ konvergent? (2p)

6. Kurvan given i polära koordinater av $r = 1 - \varphi^2$, där $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, roteras ett varv kring y-axeln. Beräkna rotationsytans area.

7. Låt $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$. Bestäm var f antar sitt största värde.

Lycka till!

SVAR M.M. ENVARIABELANALYS 2, 2011-03-19.

1)

Volym ges enligt skivformeln av

$$\pi\int_0^{\ln 2}(e^x)^2\,dx = \pi\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2} = \pi\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

SVAR: $\frac{3\pi}{2}$

---

2)

$$y' + (\sin x)y = \sin x \Leftrightarrow /\text{I.F. } e^{-\cos x}/$$

$$\Leftrightarrow (e^{-\cos x}y)' = \sin x\, e^{-\cos x} \Leftrightarrow e^{-\cos x}y = \int \sin x\, e^{-\cos x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow e^{-\cos x}y = e^{-\cos x} + C \Leftrightarrow y = 1 + Ce^{\cos x}$$

$y(0) = 1 + Ce = 0 \Leftrightarrow C = -e^{-1}$, så $y = 1 - e^{-1}e^{\cos x} = 1 - e^{\cos x - 1}$

SVAR: $y = 1 - e^{\cos x - 1}$.

---

3)

a:
$$\frac{12\sqrt[3]{8+x} - 24 - x}{x^2} = \frac{12\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}} - 24 - x}{x^2} =$$

$$= /\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + O(t^3)/ = \frac{24\left(1 + \frac{x/8}{3} - \frac{(x/8)^2}{9} + O(x^3)\right) - 24 - x}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-24}{8^2\cdot 9}x^2 + O(x^3)}{x^2} = \frac{-1}{24} + O(x) \longrightarrow -\frac{1}{24} \text{ då } x \to 0.$$

SVAR: $-1/24$

3)

b: $\dfrac{1}{x\tan x} - \dfrac{1}{x\arctan x} = \dfrac{\cos x}{x\sin x} - \dfrac{1}{x\arctan x} =$

$= \dfrac{\cos x \cdot \arctan x - \sin x}{x \sin x \arctan x} =$ $\Bigg/$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = x + O(x^3)$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) = x + O(x^3)$ $\Bigg/$

$$= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)}{x\,(x + O(x^3))(x + O(x^3))} =$$

$$= \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + O(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)}{x^3 + O(x^5)} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}x^3 + O(x^5)}{x^3 + O(x^5)} = \frac{-\frac{2}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -\frac{2}{3} \text{ då } x \to 0$$

SVAR: $-2/3$

---

4) Homogen lösning: $y_h''' - 3y_h'' + 2y_h' = 0$, $\quad r^3 - 3r^2 + 2r = r(r-1)(r-2)$

Så $y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$

Partikulärlösning: Vi gör ansatsen $y_p = ax^3 + bx^2 + cx$

$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\; y_p'' = 6ax + 2b$, $\; y_p''' = 6a$

Detta ger $y_p''' - 3y_p'' + 2y_p' = 6a - 3(6ax + 2b) + 2(3ax^2 + 2bx + c) =$

$= 6ax^2 + (-18a + 4b)x + (6a - 6b + 2c) = 2x + 6x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 6 \\ -18a + 4b = 2 \\ 6a - 6b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 20/4 = 5 \\ c = 3b - 3a = 15 - 3 = 12 \end{cases}$$

SVAR: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + x^3 + 5x^2 + 12x$.

5)

a: $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^2-3}\,dx$ är generaliserad enbart i ∞,

och $\dfrac{x^{1/3}}{x^2-3} \geq 0$. Vi jämför med $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{2-1/3}}\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{5/3}}\,dx$

som vi vet är konvergent.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{1/3}}{x^2-3}\right)\Big/\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = 1 \qquad (0<1<\infty).$$

SVAR: Konvergent.

b: $\sqrt[n]{\left|\dfrac{x^{3n}}{n3^n}\right|} = \dfrac{|x|^3}{\sqrt[n]{n}\cdot 3} \to \dfrac{|x|^3}{3}$ då $n\to\infty$, ty

$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$.

Rotkriteriet ger nu att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n3^n}$ är konvergent

om $\dfrac{|x|^3}{3} < 1 \iff |x| < \sqrt[3]{3}$, och divergent om $|x| > \sqrt[3]{3}$.

Vi får nu behandla de två fallen då $|x| = \sqrt[3]{3}$.

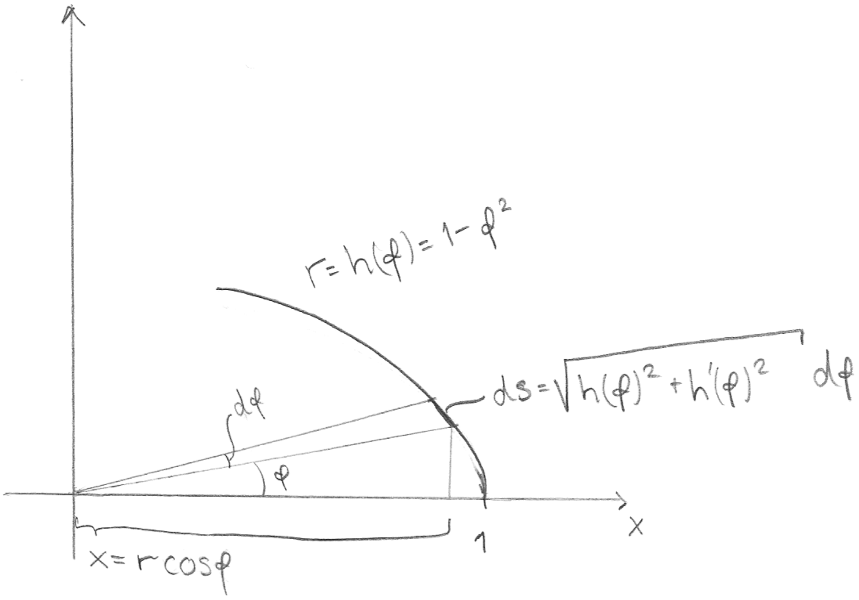
$x = \sqrt[3]{3}$ ger serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{3})^{3n}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som är divergent.

$x = -\sqrt[3]{3}$ ger serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt[3]{3})^{3n}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Denna serie är alternerande, och termernas absolutbelopp avtar mot 0 då $n\to\infty$, så denna är konvergent enligt Leibniz kriterium.

SVAR: Serien konvergerar på intervallet $-\sqrt[3]{3} \leq x < \sqrt[3]{3}$.

6)



Tyngdpunktens väg för bågelementet ds blir $2\pi r\cos\varphi =$
$= 2\pi(1-\varphi^2)\cos\varphi.$

$$\sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} = \sqrt{(1-\varphi^2)^2 + (-2\varphi)^2} = \sqrt{1-2\varphi^2+\varphi^4+4\varphi^2} =$$

$$= \sqrt{(1+\varphi^2)^2} = 1+\varphi^2.$$

Arean ges nu av

$$\int_0^{\pi/4} 2\pi(1-\varphi^2)\cos\varphi\, ds = 2\pi\int_0^{\pi/4}(1-\varphi^2)(1+\varphi^2)\cos\varphi\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/4}(1-\varphi^4)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$= /$ Partiell integration... $/ =$

$$= 2\pi\Big[\sin\varphi - \varphi^4\sin\varphi - 4\varphi^3\cos\varphi + 12\varphi^2\sin\varphi + 24\varphi\cos\varphi - 24\sin\varphi\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi^4}{4^4} - \frac{4\pi^3}{4^3} + \frac{12\pi^2}{4^2} + \frac{24\pi}{4} - 24\right) =$$

$$= \sqrt{2}\pi\left(6\pi + \frac{3\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^4}{256} - 23\right)$$

SVAR: $\sqrt{2}\pi\left(6\pi + \frac{3\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^4}{256} - 23\right).$

7) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

(Det är lätt att se att serien är konvergent för alla $x\in\mathbb{R}$ via kvotkriteriet, men detta behöver ej motiveras).

$f(x)=-f(-x)$ och speciellt gäller $f(0)=0$, $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$.

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\sin x}{x} \quad (x\neq 0,\ f'(0)=1).$$

$$f'(x)=0 \iff \sin x=0,\ x\neq 0 \iff x=n\pi,\ n=\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

Låt

$$a_m=\int_{(m-1)\pi}^{m\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=\left/\begin{matrix}t=(m-1)\pi+s\\ dt=ds\end{matrix}\right/=\int_0^{\pi}\frac{(-1)^{m-1}\sin s}{(m-1)\pi+s}\,ds$$

Vi har alltså

$$a_1>-a_2>a_3>-a_4>a_5>\dots>0, \quad \begin{cases}a_1+a_2>0,\ a_3+a_4>0,\dots\\ a_2+a_3<0,\ a_4+a_5<0,\dots\end{cases}$$

Så

$$0<\sum_{m=1}^{2k}a_m=f(2k\pi)<\sum_{m=1}^{2k+1}a_m=f((2k+1)\pi)<f(\pi) \quad k=1,2,\dots$$

Detta ger att $0<f(n\pi)<f(\pi)$ för $n=2,3,\dots$

Då $f(x)$ har lokala max i punkterna $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ och lokala min i $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ följer att $0<f(x)<f(\pi)$ för alla $x>0$ (ty $f'(x)>0$ på $]0,\pi[$). Eftersom $f(-x)=-f(x)$ får vi därför att $f(x)$ antar sitt största värde i $x=\pi$.

SVAR: $f(x)$ antar sitt största värde i $x=\pi$.