Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2011-01-14 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 5y' - 14y = 18xe^x$.

2. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x^2+x^6) - 2 + x^4}{x^8}$ (2p)

   (b) Avgör om $\ln(1+x^4)$ har lokalt maximum eller minimum i $x = 0$. (1p)

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $e^x y' + e^{2x} y = e^{3x}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

4. Beräkna längden av den parametriserade kurvan

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

5. (a) Beräkna summan av serien $9 + 6 + 4 + 8/3 + \cdots$. (1p)

   (b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - e^{-1/n}}{2}$ är konvergent. (1p)

   (c) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ är konvergent. (1p)

6. Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Visa att $f(x) = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ för alla $x \in [-1/2, 1/2]$.

7. Låt $f\colon [0,1] \to [0,\infty[$ vara kontinuerligt deriverbar och låt M och m vara f:s största respektive minsta värde. Visa att arean av rotationsytan som uppstår då f:s graf roteras ett varv kring x-axeln är större än eller lika med $\pi(M^2 - m^2)$.

Lycka till!

Lösningsskiss, Envariabelanalys 2, 2011-01-14

1) • $y_h'' - 5y_h' - 14y_h = 0$: $r^2 - 5r - 14 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14}$

ger $r = 7$ eller $r = -2$, så

$y_h = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-2x}$

• Ansats: $y_p = (ax+b)e^x$ ger $y_p' = (ax+a+b)e^x$, $y_p'' = (ax+2a+b)e^x$.

Insatt i ekvationen får vi

$(ax+2a+b)e^x - 5(ax+a+b)e^x - 14(ax+b)e^x =$

$= (a-5a-14a)xe^x + (2a+b-5a-5b-14b)e^x = 18xe^x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -18a = 18 \\ -3a - 18b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1/6 \end{cases}$

Så $y_p = (-x + 1/6)e^x$

SVAR: $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-2x} + (-x + 1/6)e^x$

---

2)

a: $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2+x^6) - 2 + x^4}{x^8} = \Big/ \cos t = 1 - t^2/2 + t^4/4! + O(t^6) \Big/$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1 - \frac{(x^2+x^6)^2}{2} + \frac{(x^2+x^6)^4}{24} + O(x^{12})\right) - 2 + x^4}{x^8} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2 - x^4 - 2x^8 + 2\cdot\frac{x^8}{24} + O(x^{12}) - 2 + x^4}{x^8} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{46x^8}{24} + O(x^{12})}{x^8} = -46/24 = -23/12$

SVAR: $-23/12$

b: $\ln(1+x^4)$ har ett lokalt minimum i $x=0$,

ty $\ln$ är en växande funktion och $x^4 \geq 0$ med likhet om och endast om $x=0$.

SVAR: Lokalt minimum.

②

3) $e^x y' + e^{2x} y = e^{3x} \Leftrightarrow y' + e^x y = e^{2x} \Leftrightarrow$ / I.F. e^{e^x} / $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{e^x} y)' = e^{2x} e^{e^x} \Leftrightarrow$

$e^{e^x} y = \int e^{2x} e^{e^x} dx = \int e^x \cdot e^x e^{e^x} dx =$

$= e^x e^{e^x} - \int e^x e^{e^x} dx = e^x e^{e^x} - e^{e^x} + C$

$\Leftrightarrow \quad y = e^x - 1 + Ce^{-e^x}$

$y(0) = 1 - 1 + Ce^{-1} = 1 \Leftrightarrow \quad C = e$

SVAR: $y = e^x - 1 + e \cdot e^{-e^x}$.

---

4) $x' = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta$

$y' = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta$

$(x')^2 + (y')^2 = (-2\sin\theta + 2\sin 2\theta)^2 + (2\cos\theta - 2\cos 2\theta)^2$

$= 4\sin^2\theta - 8\sin\theta\sin 2\theta + 4\sin^2 2\theta + 4\cos^2\theta - 8\cos\theta\cos 2\theta + 4\cos^2 2\theta$

$= 8 - 8(\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta) =$

$=$ / $\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta =$
$= 2\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) =$
$= \cos\theta$ / $= 8 - 8\cos\theta$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos\theta}\, d\theta =$ / $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ / $=$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2(\theta/2)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 4\sin(\theta/2)\, d\theta = \left[-8\cos(\theta/2)\right]_0^{2\pi} = 16$

SVAR: 16

5)

a: $9+6+4+8/3+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 9\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$= 9\cdot\frac{1}{1-2/3} = 27$

SVAR: 27

b: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{1/n}-e^{-1/n}}{2}\right)/(1/n) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}+O(1/n^2)-1+\frac{1}{n}+O(1/n^2)\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n}+O(1/n^2)\right) = 1 \qquad (0<1<\infty).$

Enligt jämförelseprincipen gäller därför att

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-e^{-1/n}}{2}$ är divergent, ty $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ är divergent.

SVAR: Divergent.

c: $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}, \quad \frac{\ln x}{x^2}\geq 0$ om $x\geq 1.$

Vidare gäller att $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,$

så det finns $T>0$ sådant att $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$ om $x\geq T.$

D.v.s.

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^{T}\frac{\ln x}{x^2}\,dx + \int_T^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$\leq \int_1^{T}\frac{\ln x}{x^2}\,dx + \int_T^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx < +\infty.$$

Ty $\int_T^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ är konvergent.

SVAR: Konvergent.

6) $f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, ...,

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$ för $n \geq 1$.

Så

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!}x^{N+1} \quad (t \text{ mellan } 0 \text{ och } x).$$

$$\left| \frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!}x^{N+1} \right| \leq \frac{N!\;2^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{N+1} \quad (x \in [-1/2, 1/2]).$$

Då detta visar att $\frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!}x^{N+1} \to 0$ då $N \to \infty$ för varje $x \in [-1/2, 1/2]$ följer påståendet direkt.

---

7) Vi ska alltså visa att

$$2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \geq \pi(M^2 - m^2).$$

Då

$$2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 f(1-x)\sqrt{1+f'(1-x)^2}\,dx$$

kan vi utan förlust anta att det finns punkter a, b med $0 \leq a < b \leq 1$ sådana att $f(a) = m$, $f(b) = M$.

Nu gäller

$$2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \geq 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \geq \Big/ \sqrt{1+f'(x)^2} \geq f'(x) \Big/$$

$$\geq 2\pi \int_a^b f(x)f'(x)\,dx = 2\pi \left[\frac{f(x)^2}{2} \right]_a^b =$$

$$= \pi\left(f(b)^2 - f(a)^2\right) = \pi(M^2 - m^2) \quad \text{V.S.B.}$$