Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod:TATA42
Provkod:TEN1

TENTAMEN I ENVARIABELANALYS 2
2010-08-24 kl 8.00-13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + xy = x$ som uppfyller $y(0) = 0$ (3p).

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + y = \cos x + 1$ (3p).

3. Kurvan given av $y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring linjen $y = 1$. Beräkna rotationsarean (3p).

4. a) Bestäm konstanten C så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2) - C(x-1)}{(x-1)^2}$$

existerar ändligt (1p).

b) Låt $f(x) = x^3 \sin x$. Beräkna $f^{(100)}(0)$ (1p).

c) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = \sqrt{\cos x}$ (1p).

5. a) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{1}{n}}$ är konvergent eller divergent (1p).

b) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ är konvergent eller divergent (2p).

6. Visa att den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x \, dx$ är konvergent (3p).

7. Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n}$ är divergent (3p).

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN I
ENVARIABELANALYS 2
2010-08-24

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + xy = x$ som uppfyller $y(0) = 0$ (3p).

Den integrerande faktorn är $G(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$. Multiplicerar vi ekvationen med denna får vi

$$e^{\frac{x^2}{2}}(y' + xy) = e^{\frac{x^2}{2}}x$$

dvs

$$(e^{\frac{x^2}{2}}y)' = e^{\frac{x^2}{2}}x.$$

Av detta följer att

$$e^{\frac{x^2}{2}}y(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}}xdx = e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger att $0 = e^0 + C \iff C = -1$,

dvs den sökta lösningen är

$$y(x) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + y = \cos x + 1$ (3p).

Steg1. Differentialekvationen $y'' + y = 0$ har den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 1 = 0,$$

med lösningarna $r = \pm i$ och därför har vi de homogena lösningarna

$$y_h(x) = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$$

eller

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Steg 2. För att hitta en partikulärlösning till

$$y'' + y = \cos x \tag{1}$$

ansätter vi

$$y = x(d_1 \cos x + d_2 \sin x) = d_1x \cos x + d_2x \sin x,$$

deriverar och stoppar in i ekvationen (1). Detta ger

$$y''+y = d_1(-2\sin x-x\cos x)+d_2(2\cos x-x\sin x)+d_1x\cos x+d_2x\sin x = -2d_1\sin x+2d_2\cos x = \cos x.$$

dvs $-2d_1 \sin x + 2d_2 \cos x = \cos x$. Om vi därefter identifierar koefficienterna framför $\sin x$ och $\cos x$ så får $d_1 = 0, d_2 = \frac{1}{2}$. Så particularlösningen till (1) är

$$y_{p1}(x) = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Steg 3. För att hitta en partikulärlösning till

$$y'' + y = 1 \tag{2}$$

ansätter vi $y = C$ och stoppar in i ekvationen (2):

$$(C)'' + C = 1$$

Så particularlösningen till (2) är:

$$y_{p2}(x) = 1.$$

Svar till problemet 2

$$y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

3. Kurvan given av $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring linjen $y = 1$. Beräkna rotationsarean (3p).

För att beräkna rotationsarean behöver vi beräkna integralen

$$S = 2\pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) ds = 2\pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = 2\pi \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)\, dx =$$

$$[2\pi \arcsin x]_0^1 - 2\pi = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} - 2\pi = \pi^2 - 2\pi.$$

4. a) Bestäm konstanten C så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2) - C(x-1)}{(x-1)^2}$$

existerar ändligt (1p).
Eftersom

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2) - C(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{2\ln(x-1+1) - C(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + O((x-1)^3) - C(x-1)}{(x-1)^2}$$

ser vi att gränsvärdet existerar ändligt om $C = 2$. Om $C = 2$ får vi

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2) - 2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{2(-\frac{(x-1)^2}{2} + O((x-1)^3)}{(x-1)^2} = -1.$$

b) Låt $f(x) = x^3 \sin x$. Beräkna $f^{(100)}(0)$ (1p).
Eftersom

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{97}}{97!} - \frac{x^{99}}{99!} + ...$$

får vi att

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1}x + ... \frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} + ... = x^3(x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{97}}{97!} - \frac{x^{99}}{99!} + ...) = x^4 - \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{100}}{97!} - ...$$

Härav följer att

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = \frac{1}{97!}$$

eller

$$f^{(100)}(0) = 98 \cdot 99 \cdot 100 = 970200.$$

c) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = \sqrt{\cos x}$ (1p).
För en jämn funktion $f(x)$ har vi

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + O(x^6)$$

och

$$(f(x))^2 = (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + O(x^6))^2 = (a_0)^2 + 2a_0 a_2 x^2 + (2a_0 a_4 + (a_2)^2)x^4 + O(x^6).$$

Eftersom

$$(f(x))^2 = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

får vi att

$$(a_0)^2 = 1,\ 2a_0 a_2 = -\frac{1}{2},\ 2a_0 a_4 + (a_2)^2 = \frac{1}{24}.$$

och alltså $a_0 = f(0) = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ och $2a_4 + \frac{1}{16} = \frac{1}{24}$ (dvs $a_4 = -\frac{1}{96}$).
Svar: Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = \sqrt{\cos x}$ är

$$1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4.$$

5. a) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{1}{n}}$ är konvergent eller divergent (1p).

Serien är divergent eftersom $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n e^{-\frac{1}{n}}\right| = 1$ (termerna går alltså inte mot 0, så serien är divergent enligt divergenstestet.

b) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ är konvergent eller divergent (2p).
Eftersom $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ då $n \to \infty$ finns en konstant C sådan att $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq C$ för $n \geq 1$.
Från olikheterna

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$$

följer att serien är konvergent.

6. Visa att den generaliserade integralen $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin x \; dx$ är konvergent (3p).

Eftersom

$$\int_0^\infty \left| e^{-x^2} \sin x \right| dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 dx + \int_1^\infty e^{-x} dx = 1 + \frac{1}{e}$$

är den generaliserade integralen $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin x \, dx$ absolutkonvergent, och därmed konvergent.

7. Visa att serien $\sum_{n=1}^\infty \frac{n! e^n}{n^n}$ är divergent (3p).

Låt $a_n = \frac{n! e^n}{n^n}$. Då är

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n! e^n}{n^n}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Notera att $(1+\frac{1}{n})^n < e$ (vi vet att $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + .. > 1 + x$ för alla positiva x. Vi sätter $x = \frac{1}{n}$ och får $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$ eller $(1+\frac{1}{n})^n < e$). Alltså

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

för alla n och $a_n > a_1 = e$ dvs a_n går inte mot 0 och serien är divergent.