Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2010-06-10 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq x^2 + 2$, $1 \leq x \leq 3$ roteras ett varv kring linjen $x = 1$.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2 y' - 2xy = x^4 e^x$, $x < 0$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(-1) = 0$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = xe^{-x}$.

4. (a) Beräkna
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin 2x - 2x^3}{x^5} \qquad (1\text{p}),$$
(b) Beräkna
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1 + x^2/4}{x^4} \qquad (1\text{p}),$$
(c) Avgör om $f(x) = x^2(\ln(1 + 2x) - 2x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 0$ (1p).

5. (a)
$$\text{Avgör om } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4}{n^4 + 3} \text{ är konvergent (1p),}$$
(b)
$$\text{Beräkna } a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ samt avgör om } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ är konvergent (2p).}$$

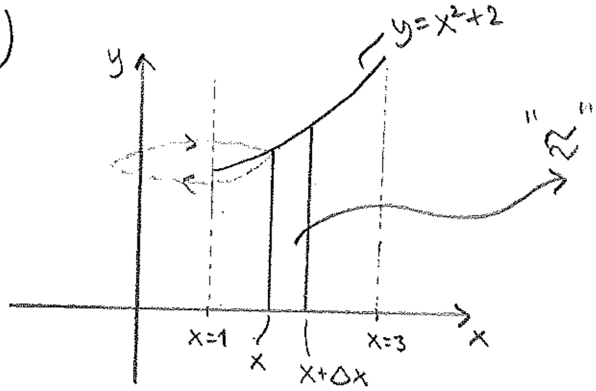
6. Givet en funktion $f \geq 0$ på $[0, \infty)$ låt $I_f(t), J_f(t)$ beteckna volymen som uppstår då området $0 \leq x \leq t$, $0 \leq y \leq f(x)$ roteras ett varv runt $x-$ respektive $y-$axeln. Bestäm konstanten c så att det finns ett $f \geq 0$ som uppfyller
$$I_f(t) + J_f(t) = \pi(t^2 + \mathrm{e}^t + c) \quad (0 \leq t < \infty),$$
samt bestäm det f som uppfyller ekvationen för detta c.

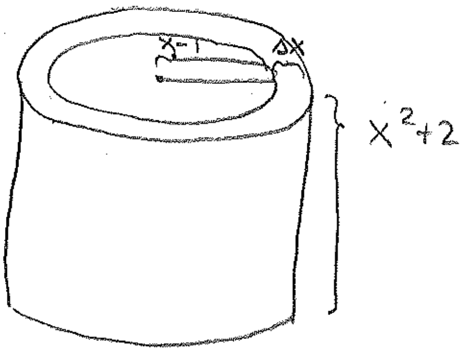
7. Visa att en funktion f på $\mathbb{R}$ är av klass $C^2(\mathbb{R})$ (d.v.s. har kontinuerliga derivator upp till och med ordning 2) om och endast om det finns kontinuerliga funktioner g, k, l på $\mathbb{R}$ som uppfyller att för alla x, h så finns t mellan x och $x + h$ sådant att
$$f(x + h) = g(x) + k(x)h + l(t)h^2.$$

LYCKA TILL!

Lösningsförslag, Envariabelanalys 2, 2010-06-10

1)





Volym $\approx 2\pi(x-1)(x^2+2)\Delta x$

$$\text{Volym} = \int_1^3 2\pi(x-1)(x^2+2)\,dx = 2\pi\int_1^3 (x^3+2x-x^2-2)\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}+x^2-\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3 = \frac{92\pi}{3}$$

SVAR: $\frac{92\pi}{3}$

---

2) För $x<0$ gäller:

$$x^2y'-2xy = x^4e^x \Leftrightarrow y'-\frac{2}{x}y = x^2e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big/ (-2\ln|x|)' = -2/x,\ e^{-2\ln|x|} = 1/x^2 \Big/ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \left(\frac{1}{x^2}y\right)' = e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}y = e^x + C \Leftrightarrow y = x^2e^x + Cx^2$$

$y(-1) = e^{-1}+C = 0$ ger $C = -e^{-1} = -1/e$

SVAR: $y = x^2e^x - \frac{x^2}{e}$.

3) Homogen lösning: $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$ ger $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Partikulärlösning: $y_p := z e^{-x}$ ger

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = (D-2)(D+1)(ze^{-x}) = /\text{förskjutningsregeln}/$$

$$= e^{-x}(D-3)Dz = e^{-x}(z'' - 3z') = xe^{-x}$$

$z'' - 3z' = x$: Ansätt $z = ax^2 + bx$ vilket ger

$$z'' - 3z' = 2a - 6ax - 3b = x \Leftrightarrow a = -1/6,\ b = -1/9$$

SVAR: $y = C_1 e^{2x} + \left(C_2 - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right)e^{-x}$.

---

4)
(a) $$\frac{x^2 \sin 2x - 2x^3}{x^5} = \frac{x^2\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + O(x^5)\right) - 2x^3}{x^5} = \frac{-\frac{8x^5}{6} + O(x^7)}{x^5}$$

$$= \frac{-4/3 + O(x^2)}{1} \to -4/3 \text{ då } x \to 0.$$

SVAR: $-4/3$

(b) $$\frac{\sqrt{\cos x} - 1 + x^2/4}{x^4} = \frac{\left(\sqrt{\cos x} - (1 - x^2/4)\right)\left(\sqrt{\cos x} + (1 - \frac{x^2}{4})\right)}{x^4\left(\sqrt{\cos x} + (1 - \frac{x^2}{4})\right)} =$$

$$= \frac{\cos x - (1 - x^2/4)^2}{x^4\left(\sqrt{\cos x} + 1 - \frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}}{x^4\left(\sqrt{\cos x} + 1 - \frac{x^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{16}\right) + O(x^6)}{x^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x} + 1 - \frac{x^2}{4}} \to -\frac{1}{48} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{96}$$

SVAR: $\frac{-1}{96}$

4) (c)

$$f(x) = x^2(\ln(1+2x) - 2x) = x^2\left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + O(x^3) - 2x\right) =$$

$$= -2x^4(1+O(x))\,.$$

Så $f(x)$ beter sig som $-2x^4$ nära origo, d.v.s. har lokalt max.

SVAR: $f(x)$ har lokalt max i $x=0$.

5)

(a) Vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ (som är divergent):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+4}{n^4+3}\right)/(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+4n}{n^4+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n^3}{1+3/n^4} = 1 \quad (0<1<\infty)$$

SVAR: Divergent.

(b)
$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^{k-n}} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ är alternerande och $|(-1)^n a_n| = a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ avtar mot 0 då $n\to\infty$.

Alltså är serien konvergent enligt Leibniz kriterium.

SVAR: $a_n = 1/2^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ är konvergent.

6)
$$I_f(t) + J_f(t) = \pi\int_0^t f(x)^2\,dx + 2\pi\int_0^t x f(x)\,dx = \pi\int_0^t (f(x)^2 + 2x f(x))\,dx =$$

$$= \pi(t^2 + e^t + C).$$

$t=0$ ger nu att $\pi(0^2 + e^0 + C) = \pi(1+C) = 0 \iff C=-1$.

Derivation ger nu ekvationen

$f(t)^2 + 2t f(t) = 2t + e^t \iff (f(t)+t)^2 - t^2 = 2t+e^t \iff /f(t)\geq 0/ \iff$

$f(t) + t = \sqrt{t^2+2t+e^t}$

SVAR: $C=-1$, $f(t) = -t + \sqrt{t^2+2t+e^t}$.

7) Om $f \in C^2(\mathbb{R})$ så gäller enligt Taylors formel med Lagranges restterm att

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(t)}{2}h^2$$

för något t mellan x och $x+h$. Sätt nu $g = f$, $k = f'$, $l = \frac{f''}{2}$.

Antag nu omvänt att g, k, l existerar. Vi ska nu succesivt visa att $f = g$, $f' = k$, $f'' = 2l$ vilket givetvis visar påståendet.

Med $h = 0$ får vi $f(x) = g(x)$. Vidare gäller nu att

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - g(x)}{h} = \frac{k(x)h + l(t)h^2}{h} \to k(x) \text{ då } h \to 0.$$

Så $f'(x) = k(x)$ (och $f'(x)$ existerar per definition).

Nu noterar vi att vi har

$$(*)\ f(x) = f(x+h-h) = g(x+h) - k(x+h)h + l(t)h^2$$

$$(**)\ f(x+2h) = f(x+h+h) = g(x+h) + k(x+h)h + l(t_1)h^2 = g(x) + k(x)2h + l(t_2)4h^2.$$

Här gäller att $t, t_1, t_2 \to x$ då $h \to 0$, och nu följer därför:

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{k(x+h)h - k(x)h}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{k(x+h)h + k(x+h)h - 2k(x)h}{h^2} = /(*), (**)/ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{g(x+h) - g(x) + l(t)h^2 + g(x) - g(x+h) + (4l(t_2) - l(t_1))h^2}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(l(t) + 4l(t_2) - l(t_1)\right) \longrightarrow 2l(x) \text{ då } h \to 0 \text{ (ty } l \text{ är kontinuerlig).}$$

Så $f'' = 2l$ och vi kan dra slutsatsen att $f \in C^2(\mathbb{R})$.

V.S.B.