LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2010-05-28 kl 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = 4e^x$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = -1$.

2. Området givet av olikheterna $1 \leq y \leq e^x$ och $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring y-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

3. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \arctan x}$. (1 p)

   (b) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x + \sin ax}{x^2}$ existerar ändligt samt beräkna gränsvärdet. (2 p)

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $2xy' + y = \dfrac{1}{x+1}$, $x > 0$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 0$.

5. (a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$ är konvergent eller divergent. (1 p)

   (b) Undersök serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 1}{n^2 + n}$ med avseende på absolutkonvergens och konvergens. (2 p)

6. Ange ett rationellt tal som approximerar $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^5}\, dx$ med ett fel som är högst $\dfrac{1}{10}$.

7. Låt f vara en deriverbar funktion sådan att $f'(x) \leq 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Visa att $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x) \sin x \, dx$ är konvergent $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Envariabelanalys 2, TATA42, 2010-05-28, lösningsförslag

1. Karaktäristiskt polynom är $r^2 - 2r - 3 = (r+1)(r-3)$ och $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

   Förskjutningsregeln ger att $(D+1)(D-3)y = 4e^x \Leftrightarrow /y = e^x z/ \Leftrightarrow (D+1+1)(D+1-3)z = (D+2)(D-2)z = z'' - 4z = 4$. Ansättningen $z_p = A$ ger $z_p = -1$ och $y_p = -e^x$. En godtycklig lösning ges således av $y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - e^x$.

   Eftersom $y' = -C_1e^{-x} + 3C_2e^{3x} - e^x$ gäller att $y(0) = 3$ och $y'(0) = -1 \Leftrightarrow 3 = C_1 + C_2 - 1$ och $-C_1 + 3C_2 - 1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 3$ och $C_2 = 1$. Svar: $y = y = 3e^{-x} + e^{3x} - e^x$.

2. En lämplig figur visar att $dV = 2\pi x(e^x - 1)dx$ och hela volymen $= 2\pi \int_0^1 x(e^x-1)\,dx = 2\pi(\int_0^1 xe^x\,dx - \int_0^1 x\,dx) = /\text{PI}/ = 2\pi([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx - [\frac{x^2}{2}]_0^1) = 2\pi(e - [e^x]_0^1 - \frac{1}{2}) = 2\pi(e - (e-1) - \frac{1}{2}) = \pi$. Svar: π.

3. (a) $\dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{x \arctan x} = /\text{ML-utveckling}/ = \dfrac{x + O(x^3) - (x - \frac{x^2}{2} + O(x^3))}{x(x + O(x^3))} = \dfrac{\frac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} = \dfrac{\frac{1}{2} + O(x)}{1 + O(x^2)} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är $1/2$.

   (b) $\dfrac{e^{2x} - \cos x + \sin ax}{x^2} = /\text{ML-utveckling}/$
   $= \dfrac{1 + 2x + 2x^2 + O(x^3) - (1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)) + ax + O(x^3)}{x^2} = \dfrac{(2+a)x + \frac{5}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2} = \dfrac{2+a}{x} + \dfrac{5}{2} + O(x) = /2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -2$ är nödvändigt för gränsvärde/ $= \dfrac{5}{2} + O(x) \to \dfrac{5}{2}$ då $x \to 0$. Svar: För $a = -2$ är gränsvärdet är $5/2$.

4. Första ordningens linjär DE.

   $2xy' + y = \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{1}{2x(x+1)} \Leftrightarrow / \int \dfrac{dx}{2x} = /x > 0/ = \dfrac{1}{2}\ln x + C = \ln\sqrt{x} + C$, IF$= e^{\ln\sqrt{x}} = \sqrt{x}/ \Leftrightarrow (y\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \Leftrightarrow y\sqrt{x} = \int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)} = /t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2, t > 0,\ dx = 2tdt/ = \int \dfrac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan\sqrt{x} + C \Leftrightarrow$
   $y = \dfrac{\arctan\sqrt{x} + C}{\sqrt{x}}$.

   $y(1) = 0$ ger $0 = \dfrac{\pi}{4} + C \Leftrightarrow C = -\dfrac{\pi}{4}$. Den sökta lösningen är således $y = \dfrac{\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{x}}$.
   Svar: $y = \dfrac{\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{x}}$.

5. (a) Positiv serie. $1 - \cos\dfrac{1}{n} = 1 - (1 - \dfrac{1}{2n^2} + O(\dfrac{1}{n^4})) = \dfrac{1}{2n^2} + O(\dfrac{1}{n^4}) = \dfrac{1}{n^2}(\dfrac{1}{2} + O(\dfrac{1}{n^2}))$. Eftersom $\dfrac{1}{2} + O(\dfrac{1}{n^2})) \to \dfrac{1}{2}$ då $n \to \infty$ och $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ är konvergent följer att även $\sum(1 - \cos\dfrac{1}{n})$ är konvergent enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.
   Svar: Serien är konvergent.

(b) $|\frac{(-1)^n n+1}{n^2+n}\| = \frac{1}{n}|\frac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}|$. Eftersom $|\frac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}| \to 1$ då $n \to \infty$ och $\sum \frac{1}{n}$ är divergent följer av jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att även $\sum |\frac{(-1)^n n+1}{n^2+n}|$ är divergent och därmed att serien inte är absolutkonvergent.

Notera att $\frac{(-1)^n n+1}{n^2+n} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n^2+n}$. Då $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ är alternerande och $\frac{1}{n+1}$ avtar mot 0 är $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergent enligt Leibniz. Vidare gäller att $0 < \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$, då $n \geq 1$, och då $\sum \frac{1}{n^2}$ är konvergent ger jämförelsekriteriet att även $\sum \frac{1}{n^2+n}$ är konvergent. Sammantaget visar detta att $\sum \frac{(-1)^n n+1}{n^2+n}$ är konvergent. Svar: Serien är konvergent men inte absolutkonvergent.

6. Enligt Maclaurin med restterm på Lagranges form gäller att $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{e^\xi t^4}{4!}$ för något ξ mellan 0 och t. Sätt $t=-x^5$ så fås att $\int_{-1}^{1} e^{-x^5}\ dx = \int_{-1}^{1}(1-x^5+\frac{x^{10}}{2}-\frac{x^{15}}{6})\ dx + \int_{-1}^{1}\frac{e^\xi x^{20}}{24}\ dx \Rightarrow |\int_{-1}^{1} e^{-x^5}\ dx - [x-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{11}}{22}-\frac{x^{16}}{96}]_{-1}^{1}| = |\int_{-1}^{1} e^{-x^5}\ dx\text{-}(2+\frac{1}{11})| = |\int_{-1}^{1}\frac{e^\xi x^{20}}{24}\ dx| \leq /0 < e^\xi < 4, \text{ ty } -1 \leq \xi \leq 1/ \leq 4\int_{-1}^{1}\frac{x^{20}}{24}\ dx = \frac{1}{6}[\frac{x^{21}}{21}]_{-1}^{1} = \frac{1}{63} < \frac{1}{10}$. Således är $2+\frac{1}{11}=\frac{23}{11}$ ett närmedvärde med ett fel mindre än $\frac{1}{10}$.

Svar: Exempelvis $\frac{23}{11}$.

7. $f' \leq 0$ medför att f är avtagande och därmed existerar $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ där $A = -\infty$ är möjligt.

Notera också att $\int_0^\infty f(x)\sin x\ dx$ är konvergent medför att $\int_N^M f(x)\sin x\ dx \to 0$ om $M > N$ och $N \to \infty$.

Om $A > 0$ finns ω sådant att $x \geq \omega \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2}$. För $n \in \mathbf{N}$ sådan att $2n\pi > \omega$ gäller då att $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\ dx > \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}$ vilket visar att $\int_0^\infty f(x)\sin x\ dx$ ej är konvergent.

Fallet $A < 0$ ger samma slutsats (ersätt $\frac{A}{2}$ med ett godtyckligt tal < 0 om $A = -\infty$) ty $\int_0^\infty f(x)\sin x\ dx$ är konvergent precis då $\int_0^\infty (-f(x))\sin x\ dx$ är konvergent. Således gäller att $\int_0^\infty f(x)\sin x\ dx$ är konvergent $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Antag att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och sätt $a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)|\sin x|\ dx$. Det gäller att (a_k) avtar mot 0, ty $f(x)$ avtar mot 0 då $x \to \infty$ och $|\sin x|$ har perioden π, och därför att $\int_0^{n\pi} f(x)\sin x\ dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k \to \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ eftersom serien är konvergent enligt Leibniz.

Låt $b > 0$ och låt n_b vara det största heltalet sådant att $n_b\pi \leq b$. Notera att $|\int_{n_b\pi}^{b} f(x)\sin x\ dx| \leq \pi f(n_b\pi) \to 0$ då $b \to \infty$ ty $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Således gäller att $\int_0^b f(x)\sin x\ dx = \int_0^{n_b\pi} f(x)\sin x\ dx + \int_{n_b\pi}^{b} \sin x\ dx \to \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ då $b \to \infty$ vilket visar att $\lim_{x\to\infty} f(x) \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\sin x\ dx$ är konvergent.

Sammantaget har vi således visat ekvivalensen.